Le derivate godono della proprietà di Darboux

Per una funzione reale di variabile reale f definita su un intervallo I, si consideri la seguente proprietà, detta di Darboux o "dei valori intermedi":

(D) per ogni coppia $\{a, b\}$ di punti di I e ogni valore γ compreso fra $f(a)$ e $f(b)$, esiste (almeno) un punto c compreso fra a e b tale che $f(c) = \gamma$.

È ovvio che tale proprietà è equivalente al fatto che l'immagine di ogni sub-intervallo di I tramite f sia un intervallo ed è noto che, se f è continua su I, f gode di (D) su I. La proprietà (D) tuttavia non implica la continuità: la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

gode di (D) su $I = \mathbb{R}$ (verificarlo!), pur essendo discontinua in 0. Naturalmente non è casuale che la discontinuità presentata sia di seconda specie, e con non-esistenza del limite (finito o infinito): la proprietà (D) non è evidentemente compatibile con discontinuità di prima specie o eliminabili.

Una condizione, più debole della continuità ma ancora atta a garantire (D) e ancora più forte di (D), è fornita dal seguente teorema.

TEOREMA *Se f ammette primitiva su I, allora f gode di (D) su I.*

Proof Siano a e b due punti di I e sia γ un valore strettamente compreso fra $f(a)$ e $f(b)$ che supponiamo diversi (se coincidono la tesi è ovvia). Sia F tale che $F' = f$ su I. La funzione $G(x) = F(x) - \gamma x$, avendo derivata $G' = f - \gamma$ di segno non costante, non è monotona su $[a, b]$. Essendo continua, non è iniettiva: esistono allora due punti $c, d \in [a, b]$ tali che $G(c) = G(d)$. Il teorema di Rolle applicato alla funzione G relativamente all'intervallo di estremi c e d fornisce la tesi. q.e.d.

Esistono funzioni che godono di (D) su I pur non ammettendo primitiva su I: ad esempio, con $I = \mathbb{R}$, la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & x \neq 0 \\ 1/2 & x = 0 \end{cases}.$$

Infatti la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 2x\cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

essendo continua, ammette una primitiva H su $\mathbb{R}$. La funzione f definita in (1) è allora la derivata della funzione

$$F(x) = \begin{cases} x^2\cos(1/x) - H(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Se G fosse una primitiva di g su $\mathbb{R}$, $g - f$ sarebbe su $\mathbb{R}$ la derivata di $G - F$: assurdo poiché $g - f$ presenta una discontinuità eliminabile in 0 (infatti $(g - f)(x) = 0$ per $x \neq 0$, $(g - f)(0) = 1/2$).