TEOREMA DEL DOPPIO LIMITE E DINTORNI

[A] CONVERGENZA UNIFORME E LIMITATEZZA

Sia T un insieme e $\{f_n\}$ una successione di funzioni da T in $\Re^m$ (su cui $\|\cdot\|$ denota una norma qualunque) puntualmente convergente su T a una funzione f. Può accadere che ogni f_n sia limitata, ma non lo sia f [ES: $T=\Re$, $f_n(t)=t^{-1}\chi_{(1/n,+\infty)}(t)$: si ha $f(t)=t^{-1}\chi_{(0,+\infty)}(t)$; naturalmente, perché ciò accada, le f_n dovranno non essere equi-limitate, cioè dovrà non esistere una stessa costante che le limitata tutte]; può accadere che f sia limitata, ma non lo sia alcuna f_n [ES: $T=\Re$, $f_n(t)=t/n$: si ha $f\equiv 0$]. Se però la convergenza di $\{f_n\}$ a f è anche uniforme, allora f è limitata se e solo se le f_n sono (almeno definitivamente) limitate. Entrambe le affermazioni seguono facilmente dalla definizione di convergenza uniforme. Sia infatti $\tilde{n}$ tale che

$$n>\tilde{n} \Rightarrow \|f_n(t)-f(t)\|\le 1 \quad \forall t\in T:$$

ne segue, per la disuguaglianza triangolare,

$$n>\tilde{n} \Rightarrow \|f_n(t)\|-1\le\|f(t)\|\le\|f_n(t)\|+1 \quad \forall t\in T$$

disuguaglianze che provano, nell'ordine, le affermazioni "solo se" e "se".
Si noti che si può dedurre quanto segue: se una successione di funzioni limitate è uniformemente convergente, allora le funzioni sono equi-limitate o, che è lo stesso, nessuna successione di funzioni limitate non equi-limitate può convergere uniformemente (naturalmente una successione di funzioni illimitate può convergere uniformemente (a una funzione illimitata)).

[B] TEOREMA DEL "DOPPIO LIMITE"

Sia T un sottoinsieme di $\Re^n$ e sia t_0 un suo punto di accumulazione: sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni da T in $\Re^m$ puntualmente convergente su T a una funzione f. Si considerino, ammesso che esistano,

$$\alpha=\lim_{t\to t_0} f(t)=\lim_{t\to t_0}\left(\lim_{n\to\infty} f(t)\right)$$

$$\beta=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\lim_{t\to t_0} f_n(t)\right)}_{l_n}$$

C'è qualche relazione tra α e β? Naturalmente potrebbero coincidere (basta pensare a funzioni f_n costanti), ma in generale potranno essere diversi; basta porre (con $n=m=1$) $T=(0,1)$, $t_0=1$ e $f_n(t)=t^n$: si ha $f(t)\equiv 0$ e dunque $\alpha=0\ne 1=\beta$. Addirittura potrebbe esistere α e non β [ES: con

$T=(0,1)$, $t_0=1$, $f_n(t)=\begin{cases} t^n & \text{n pari} \\ 0 & \text{n dispari} \end{cases}$; oppure $f_n(t)=\left(sen\frac{1}{t-1}\right)\chi_{(1-1/n,1)}(t)$: in questo secondo caso α vale sempre 0, mentre l_n non esiste per alcun valore di n], o potrebbe esistere β e non α [ES: con $T=(0,1)$, $t_0=1$, $f_n(t)=\left(sen\frac{1}{t-1}\right)\chi_{(0,1-1/n)}(t)$: è $l_n=0$ e dunque $\beta=0$, ma $f(t)=sen\frac{1}{t-1}$].

Si noti che, con $t_0\in T$ e f_n continua in t_0 per ogni n, $\alpha=\beta$ comporterebbe la continuità in t_0 anche di f (infatti in tal caso sarebbe $l_n=f_n(t_0)$ da cui $\beta=f(t_0)$), che non è altrimenti assicurata [ES: $T=(0,1]$, $t_0=1$ e $f_n(t)=t^n$]. Vale il

Teorema (del "doppio limite")

Con le nostre notazioni, la convergenza di $\{f_n\}$ a f sia uniforme su qualche intorno U di t_0 intersecato con T, ed esista l_n per ogni n. Allora $\{l_n\}$ è una successione convergente in $\Re^m$, cioè esiste $\beta\in\Re^m$, esiste α e si ha $\alpha=\beta$.

Proof

Dimostriamo dapprima che esiste $\beta\in\Re^m$. $\{f_n\}$ soddisfa la condizione di Cauchy uniforme su $T\cap U$; sia allora $\varepsilon>0$ e sia $\tilde{n}$ tale che:

$$n,m>\tilde{n} \;\Rightarrow\; \|f_n(t)-f_m(t)\|\le\varepsilon \quad \forall t\in T\cap U$$

($\|\cdot\|$ indica una norma qualunque su $\Re^m$): per la continuità della norma, da $\lim_{t\to t_0} f_n(t)-f_m(t)=l_n-l_m$ (con n e m fissati) segue:

$$n,m>\tilde{n}\Rightarrow\|l_n-l_m\|\le\varepsilon.$$

Allora $\{l_n\}$ è una successione di Cauchy in $\Re^m$ e dunque è convergente (essendo $\Re^m$ completo con qualunque norma).

Per provare che esiste α ed è $\alpha=\beta$, basta ora provare che per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che

$$0<\|t-t_0\|<\delta, t\in T \;\Rightarrow\; \|f(t)-\beta\|<\varepsilon.$$

L'idea è quella di utilizzare le funzioni f_n, sui cui limiti per $t\to t_0$ si hanno informazioni, per fare "da ponte" fra f e β. In questa fase è essenziale rispettare l'ordine logico delle operazioni da eseguire. Prima di tutto si fissi $\varepsilon>0$, e si determini $\tilde{n}$ in modo che

$$\|l_{\tilde{n}}-\beta\|<\frac{\varepsilon}{3} \text{ e } \|f_{\tilde{n}}(t)-f(t)\|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \forall t\in T\cap U$$

(quest'ultima cosa è resa possibile dalla uniformità della convergenza). Con $\tilde{n}$ così fissato, sia $\delta_{\tilde{n}}=\delta_{\tilde{n}}(\varepsilon)$ tale che

$$0 < \|t - t_0\| < \delta_{\bar n},\ t \in T \Rightarrow \|f_{\bar n}(t) - l_{\bar n}\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(per ipotesi è $f_{\bar n}(t) \to l_{\bar n}$ per $t \to t_0$). Asseriamo che $\delta_{\bar n}$ è uno dei possibili "δ" cercati. Infatti, per $0 < \|t - t_0\| < \delta_{\bar n},\ t \in T$ si ha

$$\|f(t) - \beta\| \le \|f(t) - f_{\bar n}(t)\| + \|f_{\bar n}(t) - l_{\bar n}\| + \|l_{\bar n} - \beta\| < \varepsilon$$

CVD

Osservazioni

- Formalmente (anche se, di fatto, non sostanzialmente) δ viene a dipendere dalla funzione $f_{\bar n}$ scelta per fare "da ponte" (che a sua volta dipende da ε): ciò non inficia la dimostrazione, che prevede di associare ad ε "almeno" un valore di δ (non importa con quale criterio).
- Come immediato corollario, si ottiene (come si è già osservato) che "limite uniforme di funzioni continue in t_0 è una funzione continua in t_0". Naturalmente la stessa cosa non vale sostituendo "discontinue" a "continue"; in altre parole: la convergenza uniforme mantiene la continuità, non la discontinuità [ES: $f_n = \frac{1}{n}h$, dove h è la funzione di Dirichlet].
- Quale utile corollario, si ha il seguente criterio di convergenza (non) uniforme per le serie di funzioni (si applichi il teorema alla successione delle ridotte).
  "Siano f_k continue in t_0, sia $\sum_k f_k$ puntualmente convergente su $T \setminus \{t_0\}$ e sia $\sum_k f_k(t_0)$ non convergente. Allora la convergenza non può essere uniforme su alcun intorno di t_0".
  Limitatamente alle serie di potenze, ma solo ad esse, questo enunciato è invertito dal noto teorema di Abel. A questo proposito si osservi che, in generale, può essere $\alpha = \beta$ senza che esistano intorni di t_0 su cui la convergenza sia uniforme
  [ES: $T = [0,1)$, $t_0 = 0$, $f_n(t) = \begin{cases} nt & 0 \le t \le 1/n \\ t/n & t > 1/n \end{cases}$ $n = 1,2,\ldots$: si ha $f \equiv 0$, ma $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1\ \ \forall n$]

[C] TEOREMA DI "CONVERGENZA DOMINATA" PER L'INTEGRALE DI RIEMANN

Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni reali (Riemann) integrabili su (a,b) $(-\infty < a < b < +\infty)$ puntualmente convergente su (a,b) a una funzione f, non è detto che f sia integrabile su (a,b) o che, nel caso lo sia, si abbia $\int_a^b f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$ (documentare queste affermazioni!). E' noto però che le suddette implicazioni sussistono nel caso la convergenza sia uniforme.

Il seguente utile criterio permette in indebolire questa ipotesi.

Teorema (della "convergenza dominata")

Sia (a,b) come sopra e $\{f_n\}$ una successione di funzioni reali equi-limitate integrabili su (a,b) uniformemente convergente a f su ogni compatto contenuto in (a,b). Allora f è integrabile su (a,b) e si ha $\int_a^b f_n \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f$.

Proof

Limitiamo la dimostrazione al solo caso particolare, non infrequente, in cui ogni f_n sia continua su (a,b): in questo caso è immediata l'integrabilità di f, in quanto risulta continua e limitata su (a,b). Sia $M>0$ tale che $|f_n| \le M$ per ogni n, e sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Possiamo sempre supporre che si abbia $\frac{\varepsilon}{6M} < \frac{b-a}{2}$.

L'uniformità della convergenza sui compatti contenuti in (a,b) garantisce che esiste $\bar{n}$ tale che:

$$n > \bar{n} \;\Rightarrow\; \sup\left\{|f_n(t) - f(t)| : a + \frac{\varepsilon}{6M} \le t \le b - \frac{\varepsilon}{6M}\right\} \;<\; \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Allora se $n > \bar{n}$ ne segue

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \;\le\; \int_a^b |f_n - f| \;\le\; \int_a^{a+\frac{\varepsilon}{6M}} (|f_k| + |f|) + \int_{a+\frac{\varepsilon}{6M}}^{b-\frac{\varepsilon}{6M}} |f_n - f| + \int_{b-\frac{\varepsilon}{6M}}^{b} (|f_k| + |f|) \;\le$$

$$\le\; 2M\frac{\varepsilon}{6M} + (b-a)\frac{\varepsilon}{3(b-a)} + 2M\frac{\varepsilon}{6M} \;=\; \varepsilon$$

e dunque $\int_a^b f_n \underset{n\to\infty}{\to} \int_a^b f$.

CVD

Osservazione

Con f_n continua su (a,b) per ogni n, all'ipotesi di equi-limitatezza delle f_n si può sostituire la seguente: "sia f_n integrabile su (a,b) per ogni n almeno in senso improprio ed esista g integrabile su (a,b) almeno in senso improprio tale che $|f_n| \le g$ per ogni n". Naturalmente in tal caso l'integrabilità di f sarà garantita solo in senso improprio, e in tal senso andranno intesi i vari integrali. Riformulare la dimostrazione in questo assetto più generale.

INVITO Sfruttando la caratterizzazione della Riemann-integrabilità mediante la misura dell'insieme dei punti discontinuità, formulare la dimostrazione del teorema secondo le ipotesi originarie, dunque senza supporre che le funzioni f_n siano continue, ma solo integrabili su (a,b).