PENSIERI IN LIBERTA' SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

(questi appunti, mutuati da corsi precedentemente tenuti e lungi dall'essere completi, contengono ed estendono il contenuto di una parte delle lezioni)

[I] PROLUNGABILITÀ DI SOLUZIONI (1)

Teorema (BF) (di "buon fine" delle soluzioni)

Sia Ω un aperto di $\Re^{n+1}$ e sia $\vec{f}:\Omega \to \Re^n$ continua. Sia $\vec{\varphi}$ una soluzione massimale dell'equazione $\vec{x}' = \vec{f}(t,\vec{x})$ e sia (a,b) il suo intervallo di definizione, con $-\infty < a < b < +\infty$. Allora per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste $\delta > 0$, $\delta < \dfrac{b-a}{2}$, tale che per ogni $t \in (a,b)-(a+\delta, b-\delta)$ il punto $(t,\vec{\varphi}(t))$ cada fuori di K.

Osservazioni

- Se $a=-\infty$ e/o $b=+\infty$ l'enunciato, modificato in modo ovvio, risulta ovvio per quanto riguarda la parte modificata.
- Se $\Omega = (\alpha,\beta)\times\Re^n$ e $\vec{\psi}$ è una soluzione limitata su (α,γ) con $\gamma<\beta$, il teorema assicura che $\vec{\psi}$ è prolungabile oltre γ. Infatti sia $M = \sup\limits_{t\in(\alpha,\beta)} \|\vec{\psi}(t)\|$, e sia $\alpha<\delta<\gamma<\eta<\beta$: se $\vec{\psi}$ fosse massimale, dovrebbe esistere un intorno sinistro di γ per t appartenente al quale il punto $(t,\vec{\psi}(t))$ dovrebbe stare fuori dal compatto $[\delta,\eta]\times\overline{B(\vec{0},M)}$, il che chiaramente non accade.
- Vale la pena di sottolineare che il teorema non garantisce che $\vec{\varphi}$ si attesti in qualche punto di $\partial\Omega$, in altre parole che ammetta limite per $t\to a^+$ e per $t\to b^-$: basta considerare la funzione $\varphi:(0,+\infty)\to\Re$ definita da $\varphi(t) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{t}$ che è soluzione massimale dell'equazione $x'(t) = \dfrac{d}{dt}\operatorname{sen}\dfrac{1}{t}$.

  Prima di fornire un suggerimento per dimostrare il teorema (BF), è opportuno anticipare il teorema di esistenza e unicità locale e qualche ulteriore nozione sul prolungamento delle soluzioni.

[J] TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE PER PROBLEMI DI CAUCHY

Siano Ω aperto di $\Re^{n+1}$ e $\vec{f}:\Omega\to\Re^n$ una funzione continua. Sia $(t_0,\vec{x}_0)\in\Omega$ e $\vec{f}$ sia lipschitziana rispetto a $\vec{x}$ uniformemente rispetto a t in qualche intorno di $(t_0,\vec{x}_0)$. Allora esiste un intorno di t_0 sul quale il problema

$$(C) \qquad \begin{cases} \vec{x}' = \vec{f}(t,\vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$$

ammette soluzione unica.

Più precisamente: se $a, r > 0$ sono tali che $K = [t_0, t_0 + a] \times \overline{B(\bar{x}_0, r)} \subset \Omega$ e la lipschitzianità di $\bar{f}$ di cui sopra sussiste in K. posto $M = \max\left\{ \left\| \bar{f}(t, \bar{x}) \right\| : (t, \bar{x}) \in K \right\}$ ($\|\cdot\|$ indica la norma euclidea su $\Re^n$) e $\alpha = \min\{a, r/M\}$, la soluzione di (C) esiste unica almeno su $K = [t_0, t_0 + \alpha] \times \overline{B(\bar{x}_0, r)} \subset \Omega$.

Proof

La dimostrazione del teorema globale può essere sostanzialmente ripetuta, con l'avvertenza di definire l'operatore T non più su $C^{(0)}([t_0, t_0 + a], \Re^n)$ e neppure su tutto $C^{(0)}(I, \Re^n)$ (può essere $I \subsetneq [t_0, t_0 + a]$), ma solo sul sottoinsieme CHIUSO D di quest'ultimo costituito dalla bolla di raggio r (naturalmente la norma è ancora $\|\cdot\|_\infty$) centrata nella funzione costante $\bar{x}_0$, i cui elementi quindi sono tutte e sole le funzioni continue $\bar{\varphi} : I \to \overline{B(\bar{x}_0, r)}$ (che D sia effettivamente un insieme chiuso segue dalla continuità della norma, pensata come funzione su $C^{(0)}(I, \Re^n)$ a valori in $\Re^+$, rispetto a se stessa).

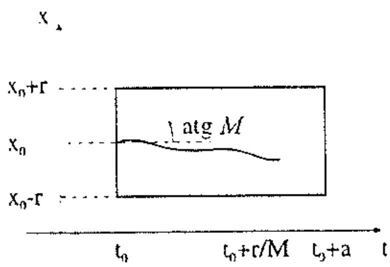
Il motivo per cui si può essere obbligati a ridurre $[t_0, t_0 + a]$ in I è dovuto al fatto di dover garantire che l'operatore T mandi D in sé (per poter applicare il teorema di punto fisso): in altre parole, che per ogni $\bar{\varphi} : I \to \overline{B(\bar{x}_0, r)}$ si abbia anche $T\bar{\varphi} : I \to \overline{B(\bar{x}_0, r)}$. In effetti, per ogni $t \in I$ si ha

$$\|(T\bar{\varphi})(t) - \bar{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \bar{f}(u, \bar{\varphi}(u)) du \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \left\| \bar{f}(u, \bar{\varphi}(u)) \right\| du \leq (t - t_0)M \leq \alpha M \leq r .$$

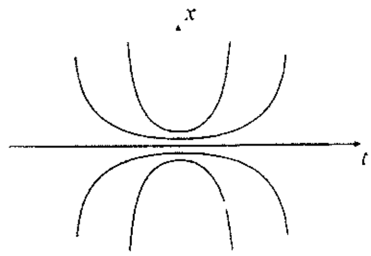
Si può ora ripetere la dimostrazione del teorema globale.

CVD

Osservazioni



- Il significato geometrico della riduzione di $[t_0, t_0 + a]$ a I è evidente quando $n = 1$: basta considerare la figura a fianco, osservando fra l'altro che la porzione di diagramma della soluzione che sta in K deve stare in particolare nel cono indicato con vertice in (t_0, x_0).
- Le ipotesi del teorema sono certamente soddisfatte se $f \in C^{(1)}(\Omega)$.
- Anche se $\Omega = \Re^{n+1}$ e per ogni $(t_0, \bar{x}_0) \in \Omega$ esiste qualche suo intorno su cui sono soddisfatte le ipotesi del teorema, vi possono essere punti la soluzione passante per i quali non è definita su tutto $\Re$ [ES: $x' = tx^3$, $t_0 \in \Re$, $x_0 \neq 0$; vedi figura). Naturalmente non potranno esserci "contatti" fra i diagrammi delle soluzioni (che sono, oltre a $x \equiv 0$, funzioni del tipo $x = \pm(H - t^2)^{-1/2}$ con $H > 0$).



- Se dalle ipotesi del teorema si sopprime la lipschitzianità locale, la tesi continua a valere per quanto riguarda la sola esistenza (locale) della soluzione (risultato dovuto a Peano). In altre parole: perché il problema (C) ammetta soluzione su qualche intorno di t_0, è sufficiente che $\vec{f}$ sia continua su Ω e $(t_0, \vec{x}_0)$ sia interno a Ω. Questo ci permette di dimostrare il teorema BF nel seguente caso particolare

[I] PROLUNGABILITÀ DI SOLUZIONI (2)

Teorema (NP) (non esistenza di "pozzi" che "inghiottono" soluzioni)

Siano Ω un aperto di $\Re^{n+1}$ e $\vec{f} : \Omega \to \Re^n$ una funzione continua. Sia $\vec{\varphi} : (a,b) \to \Re^n$ una soluzione di $\vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x})$ su (a,b) ed esista $\lim_{t \to b^-} \vec{\varphi}(t) = \vec{\alpha} \in \Re^n$. Se il punto $(b, \vec{\alpha})$ è in Ω, $\vec{\varphi}$ è prolungabile oltre b.

Proof

Il problema di Cauchy $\begin{cases} \vec{x}' = \vec{f}(t, \vec{x}) \\ \vec{x}(b) = \vec{\alpha} \end{cases}$ ammette soluzione su qualche intorno completo di b. Per qualche $\varepsilon > 0$ sia $\vec{\psi}$ una tale soluzione su $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. La funzione $\bar{\vec{\psi}}(t) = \begin{cases} \vec{\varphi}(t) & a < t < b \\ \vec{\psi}(t) & b \le t < b + \varepsilon \end{cases}$ è derivabile su (a,b) e su $[b, b + \varepsilon)$ e risolve, sui due intervalli séparatamente, l'equazione. Inoltre è continua in b e, essendo $\vec{f}$ continua, si ha

$$\lim_{t \to b^-} \bar{\vec{\varphi}}(t) = \lim_{t \to b^-} \vec{\varphi}'(t) = \lim_{t \to b^-} \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t)) = \vec{f}(t, \vec{\alpha}) \in \Re^n.$$

Dal teorema di De L'Hospital applicato al rapporto incrementale sinistro di $\bar{\vec{\varphi}}$ in b, segue subito allora che la derivata sinistra di $\bar{\vec{\varphi}}$ esiste in b e vale $\vec{f}(b, \vec{\alpha})$, cioè quanto la derivata destra. Si conclude che $\bar{\vec{\varphi}}$ è derivabile anche in b, dove soddisfa l'equazione, ed è dunque un prolungamento di $\vec{\varphi}$ oltre b.

CVD

Una possibile dimostrazione del Teorema (BF) nel caso generale si può ottenere nel seguente modo (le notazioni sono quelle dell'enunciato):

1. si sfrutta la compattezza di K per estrarre, da una qualunque successione $\{t_n\}$ convergente a b $(t_n \neq b \ \forall n)$, una successione $\{t_{n_i}\}$ tale che $\{(t_{n_i}, \vec{\varphi}(t_{n_i}))\}$ converga, per $i \to \infty$, a qualche punto $(b, \vec{\alpha}) \in K$;
2. si dimostra (tenuto conto della locale limitatezza di $\vec{\varphi}'$ dovuta alla continuità di $\vec{f}$) che se, per qualche successione $\{t_n\}$ convergente a b^-, si ha $\lim_{n \to \infty} \vec{\varphi}(t_n) = \vec{\alpha}$ con $(b, \vec{\alpha}) \in \Omega$, ne segue che esiste $\lim_{t \to b^-} \vec{\varphi}(t) = \vec{\alpha}$;
3. si applica il teorema (NP) per prolungare $\vec{\varphi}$ oltre b, contraddicendo l'ipotesi di massimalità fatta su $\vec{\varphi}$.

[K] Esistenza di soluzioni massimali

Dimostriamo ora l'esistenza di soluzioni massimali in condizioni di unicità (in tali condizioni ad ogni soluzione locale è possibile associare un unico prolungamento massimale, e dunque un unico intervallo di definizione massimale).

Lemma

Le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale siano soddisfatte relativamente ad ogni punto di Ω. Siano $\vec{\varphi}$ e $\vec{\psi}$ due soluzioni sul medesimo intervallo *I*. Se $\vec{\varphi}$ e $\vec{\psi}$ coincidono in qualche punto di *I*, allora coincidono su tutto *I*.

Proof

Sia $t_0 \in I$ tale che $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{\psi}(t_0)$, e sia $\vec{\varphi}(t) \neq \vec{\psi}(t)$ per qualche $t \in I$, $t > t_0$ (se fosse $t < t_0$ la dimostrazione si modifica in modo ovvio). Sia

$$\tilde{t} = \inf\{\, t \in I : t > t_0, \vec{\varphi}(t) \neq \vec{\psi}(t) \,\}.$$

Si ha $\vec{\varphi}(\tilde{t}) = \vec{\psi}(\tilde{t})$: ciò è ovvio se $\tilde{t} = t_0$, segue dalla continuità di $\vec{\varphi}$ e $\vec{\psi}$ se $\tilde{t} > t_0$. Per definizione di $\tilde{t}$, $\vec{\varphi}$ e $\vec{\psi}$ non coincidono però su alcun intorno destro di $\tilde{t}$: ciò contraddice l'unicità della soluzione locale del problema di Cauchy con dato iniziale $\vec{x}(\tilde{t}) = \vec{\varphi}(\tilde{t}) = \vec{\psi}(t)$, di cui sono entrambe soluzioni.

CVD

Teorema (M) (esistenza di soluzioni massimali)

Le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale siano soddisfatte relativamente ad ogni punto di Ω. Allora ogni soluzione (locale) ammette un unico prolungamento massimale.

Proof

E' opportuno riguardare le soluzioni come coppie $(\vec{\varphi}, I)$, dove I è l'intervallo su cui $\vec{\varphi}$ viene considerata soluzione dell'equazione.

Sia $\{(\vec{\varphi}_\gamma, I_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ l'insieme dei prolungamenti di $(\vec{\varphi}, I)$: tale insieme è non vuoto poiché $(\vec{\varphi}, I)$ gli appartiene. Siano α_γ e β_γ gli estremi, sinistro e destro rispettivamente, di I_γ (che può essere aperto oppure no). Sia

$$a = \inf\{a_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \qquad b = \sup\{b_\gamma : \gamma \in \Gamma\}.$$

Il lemma, unitamente alla definizione di prolungamento, garantisce che la funzione

$$\bar{\vec{\varphi}}(t) = \vec{\varphi}_\gamma(t) \quad t \in I_\gamma$$

è ben definita su (a, b). E' agevole verificare che $(\bar{\vec{\varphi}}, (a, b))$ è soluzione, è prolungamento di $(\vec{\varphi}, I)$, ed è massimale.

CVD

NB. Ricordando che Ω è aperto in $\Re^{n+1}$, l'intervallo massimale sarà comunque aperto: perché?

[L] STIME DI CRESCITA DI SOLUZIONI

Nello studio qualitativo di equazioni differenziali può risultare utile il seguente risultato di calcolo differenziale, che consente un controllo della "crescita" delle soluzioni di un'equazione sub-lineare.

Teorema (C) (di controllo)

Sia $\varphi : (a,b) \to \Re$ una funzione di classe $C^{(1)}$ ed esistano due costanti positive P e Q tali che

$$|\varphi'(t)| \le P + Q|\varphi(t)| \quad \forall t \in (a,b).$$

Allora $\forall t, t_0 \in (a,b)$ si ha

$$|\varphi(t)| \le \left(\frac{P}{Q} + |\varphi(t_0)|\right) \cdot e^{(Q|t-t_0|)}.$$

Proof

Si fissi $\varepsilon > 0$ e si ponga $z(t) = \sqrt{\varepsilon^2 + \varphi^2(t)}$, $t \in (a,b)$. Mostriamo che, come per φ, anche per z vale

(o) $$|z'(t)| \le P + Qz(t) \quad \forall t \in (a,b).$$

Infatti si ha

$$|z'(t)| = \frac{|\varphi(t)\varphi'(t)|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \varphi^2(t)}} \le |\varphi'(t)| \le P + Q|\varphi(t)| \le P + Qz(t).$$

Da (o) segue subito $\left|\frac{d}{dt}\ln(P + Qz(t))\right| \le Q$ e, integrando tra t_0 e t (si distingua il caso $t > t_0$ dal caso $t < t_0$),

$$\ln\frac{P + Qz(t)}{P + Qz(t_0)} \le Q|t - t_0|.$$

Passando all'esponenziale dei due membri, e ricordando che $|\varphi| < z$, si ottiene

$$|\varphi(t)| \le \left(\frac{P}{Q} + z(t_0)\right) \cdot e^{(Q|t-t_0|)}.$$

Per l'arbitrarietà di ε si può sostituire $|\varphi(t_0)|$ a $z(t_0)$ ottenendo la tesi.

CVD

Osservazioni

- Questo teorema fornisce, tra l'altro, una riprova del seguente fatto: se $\varphi(t)$ e $\varphi'(t)$ tendono entrambe all'infinito per $t \to t_0 \in \Re$, l'ordine di infinito di φ' è superiore a quello di φ (naturalmente l'affermazione è falsa in generale se $t_0 = \pm\infty$).

- Questo teorema consente di dimostrare (per semplicità nel caso scalare) il teorema di esistenza globale cui si è accennato nelle osservazioni del punto [H], nell'ipotesi che f sia continua e sub-lineare su $I \times \Re$, cioè che si abbia $|f(t,x)| \leq P(t)+|x|Q(t)$ $\forall t \in I \times \Re$ con P e Q funzioni continue su I (e quindi limitate su ogni intervallo compatto contenuto in I). Infatti $x' = f(t,x)$ ammette soluzioni per il teorema di Peano; inoltre per (C) ogni soluzione risulta limitata su ogni intervallo compatto contenuto in I, e quindi prolungabile a tutto I come si è già avuto modo di osservare (vedi punto [I.1])

[M] DIPENDENZA CONTINUA DELLE SOLUZIONI DAI DATI

E' di notevole importanza nelle applicazioni il seguente teorema di "stabilità" che descrive, sotto opportune ipotesi, come cambia la soluzione di un problema di Cauchy quando vengono alterate sia l'ordinata del dato iniziale, sia l'equazione differenziale.

Teorema (di "dipendenza continua dai dati")

Sia Ω aperto di $\Re^{n+1}$, e siano $\bar{f}_n, \bar{f} : \Omega \to \Re^n$ funzioni continue tali che

- $\{\bar{f}_n\}$ converga uniformemente a $\bar{f}$ sui compatti di Ω;
- per ogni compatto $K \subset \Omega$ esista una costante L_K tale che

$$\left\| \bar{f}_n(t,\bar{x}) - \bar{f}_n(t,\bar{y}) \right\| \leq L_K \left\| \bar{x} - \bar{y} \right\| \quad \forall (t,\bar{x}),(t,\bar{y}) \in \Omega,\ n \in N$$

(e quindi questa stessa disuguaglianza valga per $\bar{f}$).

Sia $(\bar{\bar{t}},\bar{\bar{x}}) \in \Omega$ e sia $\bar{\varphi} : (\alpha,\beta) \to \Re^n$ la soluzione (massimale) del problema $\begin{cases} \bar{x}' = \bar{f}(t,\bar{x}) \\ \bar{x}(\bar{\bar{t}}) = \bar{\bar{x}} \end{cases}$. Sia $[a,b] \subset (\alpha,\beta)$ e sia $\{\bar{\bar{x}}_n\}$ convergente a $\bar{\bar{x}}$ in $\Re^n$.

Allora per ogni n abbastanza grande il problema $\begin{cases} \bar{x}' = \bar{f}_n(t,\bar{x}) \\ \bar{x}(\bar{\bar{t}}) = \bar{\bar{x}}_n \end{cases}$ ammette soluzione (unica) $\bar{\varphi}_n$ definita su $[a,b]$ e $\{\bar{\varphi}_n\}$ converge uniformemente a $\bar{\varphi}$ su $[a,b]$.

Omettiamo la dimostrazione, piuttosto laboriosa, segnalando solo che essa permette di ottenere, fra l'altro, la seguente stima:

"Sia $\delta > 0$, e si ponga $U_\delta = \left\{(t,\vec{x}) \in \Re^{n+1} : a \le t \le b,\ \left\|\vec{x} - \vec{\varphi}(t)\right\| \le \delta \right\}$. Allora per n abbastanza grande si ha $\left\|\vec{\varphi}_n(t) - \vec{\varphi}(t)\right\| \le \left(\dfrac{\left\|\vec{f}_n - \vec{f}\right\|_{U_\delta}}{L_{U_\delta}} + \left\|\bar{\vec{x}}_n - \bar{\vec{x}}\right\| \right) \cdot e^{L(b-a)} \quad \forall t \in [a,b]$ dove

$\left\|\vec{f}_n - \vec{f}\right\|_{U_\delta} = \sup\left\{\left\|\vec{f}_n(t,\vec{x}) - \vec{f}(t,\vec{x})\right\| : (t,\vec{x}) \in U_\delta \right\}$".

Si noti che, anche qualora ogni $\vec{\varphi}_n$ fosse definita su (α,β), la convergenza uniforme di $\{\vec{\varphi}_n\}$ a $\vec{\varphi}$ non sarebbe garantita su tutto (α,β), neppure con $\{\vec{f}_n\}$ uniformemente convergente a $\vec{f}$ su Ω e L_K indipendente da K [ES: $f_n(t,x) = x\ \ \forall n$, $\Omega = \Re^2$, $\bar{x}_n(0) = \dfrac{1}{n}$, $(\alpha,\beta) = (-\infty,+\infty)$].

[N] UN PROBLEMA INVERSO

Esaminiamo infine un problema inverso (costruzione dell'equazione a partire dalle soluzioni) in un caso particolare.

Siano $\varphi_1,\dots,\varphi_n : (a,b) \to \Re$ n funzioni di classe $C^{(n)}((a,b))$. Esiste un'equazione lineare omogenea di ordine n a coefficienti continui su (a,b) (cioè del tipo $x^{(n)} = a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x$) di cui esse siano soluzioni su (a,b)? Nel caso $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ siano linearmente indipendenti su (a,b) la risposta è affermativa se e solo se il loro determinante wronskiano è diverso da zero in ogni punto di (a,b).

L'affermazione "solo se" è nota; per dimostrare l'altra basta osservare che

$$\det\begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n & x \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' & x' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} & x^{(n-1)} \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & \dots & \varphi_n^{(n)} & x^{(n)} \end{bmatrix} = 0$$

è una equazione lineare a coefficienti continui del tipo indicato (il coefficiente di $x^{(n)}$ è, a meno del segno, il determinante wronskiano suddetto, quindi diverso da zero in (a,b)) di cui evidentemente φ_i è soluzione per $1 \le i \le n$.

Sia, per esempio, $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = \operatorname{sen}^2 t$, $\varphi_3(t) = e^{t^2} - 1$ e U un intorno dell'origine. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono indipendenti su U? Esiste, relativamente a U, l'equazione di cui sopra?