Teorema dell'incremento finito per funzioni vettoriali

Come è evidente nel caso della funzione di una variabile reale $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, il teorema dell'incremento finito non è in generale estendibile nella sua forma "esatta" (cioè con l'uguaglianza) al caso di funzioni vettoriali.

Vale tuttavia la stima, che per ovvi motivi non è migliorabile, fornita dal seguente teorema. La norma a cui si fa riferimento è quella euclidea, qui denotata con $\|\cdot\|_n$ in $\mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|_m$ in $\mathbb{R}^m$.

Teorema 0.1 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente il segmento $[\underline{x}, \underline{x}+\underline{h}]$ e sia $\underline{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione continua sul segmento $[\underline{x}, \underline{x}+\underline{h}]$ e differenziabile almeno nei punti del segmento aperto $(\underline{x}, \underline{x}+\underline{h})$. Esiste $\theta \in (0,1)$ tale che*

$$\|\underline{f}(\underline{x}+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{x})\|_m \leq \|\mathbf{J}\underline{f}(\underline{x}+\theta\underline{h})\| \, \|\underline{h}\|_n$$

dove $\|\mathbf{J}\underline{f}(\underline{x}+\theta\underline{h})\|$ denota la miglior costante di Lipschitz della trasformazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ individuata dalla matrice Jacobiana di $\underline{f}$ valutata nel punto $\underline{x}+\theta\underline{h}$.

Proof Per $t \in [0,1]$ si ponga

$$g(t) = < \underline{f}(\underline{x}+t\underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}),\ \underline{f}(\underline{x}+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}) > .$$

Si ha $g(1) = \|\underline{f}(\underline{x}+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{x})\|_m^2$, $\;g(0) = 0$. Per il teorema di differenziazione delle funzioni composte, g è differenziabile per $t \in (0,1)$ con

$$g'(t) = < \mathbf{J}\underline{f}(\underline{x}+t\underline{h}) \cdot \underline{h}^T, \underline{f}(\underline{x}+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}) > .$$

Per il teorema dell'incremento finito applicato a $g(t)$ nel passaggio da 0 a 1 si ha allora che esiste $\theta \in (0,1)$ tale che

$$\|\underline{f}(\underline{x}+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{x})\|_m^2 = g'(\theta) = < \mathbf{J}\underline{f}(\underline{x}+\theta\underline{h}) \cdot \underline{h}^T, \underline{f}(\underline{x}+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{x}) > \leq$$

$$\leq \|\mathbf{J}\underline{f}(\underline{x}+\theta\underline{h}) \cdot \underline{h}^T\|_m \, \|\underline{f}(\underline{x}+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{x})\|_m \leq \|\mathbf{J}\underline{f}(\underline{x}+\theta\underline{h})\| \, \|\underline{h}\|_n \, \|\underline{f}(\underline{x}+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{x})\|_m$$

da cui la tesi. q.e.d.