La proprietà di Darboux non implica l'integrabilità

Una funzione può godere della proprietà di Darboux (o "dei valori intermedi") sull'intervallo $[0,1]$ senza essere limitata, dunque senza essere Riemann-integrabile: basta considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} .$$

È facile modificare l'esempio in modo che la funzione non risulti integrabile neppure in senso improprio. Sorge quindi spontanea la domanda se, per una funzione limitata su [0,1], la proprietà di Darboux implichi invece l'integrabilità. La risposta è negativa: esiste infatti una funzione che gode della proprietà di Darboux su [0.1], ma è discontinua in ogni punto. In particolare:

Fissato un qualsiasi intervallo reale I, esiste una funzione reale f su $[0,1]$ tale che $f(J) = I$ per ogni sub-intervallo J di $[0,1]$.

Proof Ripartiamo [0,1] in classi di equivalenza rispetto alla relazione: *due numeri sono equivalenti se la loro differenza è razionale.* (Una delle classi è dunque costituita esattamente dai razionali.) Poiché esistono numeri razionali (positivi) piccoli quanto si vuole, ogni intervallo contiene almeno un rappresentante per ogni classe (di fatto infiniti). Il quoziente S ha la cardinalità di I (del continuo) in quanto ogni classe ha la cardinalità del numerabile: sia allora ψ una qualunque funzione iniettiva e suriettiva da S su I. Se $\pi : [0,1] \to S$ è la mappa quoziente, $f = \psi \circ \pi$ ha la proprietà richiesta.

Suggerimento per una costruzione alternativa. Si considerino i numeri di [0,1] in rappresentazione ternaria con cifre 0, 1, 2 e quelli di I in rappresentazione binaria con cifre 0, 2. Sia $x \in [0,1]$: se nella rappresentazione ternaria di x la cifra 1 compare infinite volte, si definisca $f(x) = 0$. In caso contrario, sia $f(x)$ il numero di I corrispondente in rappresentazione binaria alla sequenza di cifre 0 e 2 che segue l'ultima cifra 1 di x. Sia J un sub-intervallo di [0,1] e sia y il suo punto medio: è chiaro che, troncando la rappresentazione ternaria di y al posto n, se n è sufficientemente grande la prosecuzione della rappresentazione troncata con 1 e quindi con tutte le possibili sequenze di soli 0 e 2 (non di periodo 2) fornisce la rappresentazione ternaria di un numero che sta ancora in J. Per questo numero varrà quanto detto sopra.

Osservazione Assumendo $I = \mathbb{R}$, si ottiene un esempio di funzione da $\mathbb{R}$ euclideo in sè che è aperta (cioè trasforma aperti in aperti), ma non è continua.