Una caratterizzazione significativa della integrabilità secondo Riemann

Premettiamo la seguente definizione.

Definizione 0.1 *Si dice che un insieme S di numeri reali ha misura di Lebesgue (brevemente L-misura) nulla e si scrive $m(S) = 0$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una successione $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ di intervalli tale che $S \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \varepsilon$, dove $l(I_n)$ denota la lunghezza dell'intervallo I_n.*

Osservazione 0.2 A rigori, nella Definizione 0.1 si sarebbe dovuto parlare di un "insieme numerabile" di intervalli che, una volta numerato in un ordine qualunque, costituisce una "successione" denotata con $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$. È chiaro che, per l'impiego che ne viene fatto, l'abuso di linguaggio può essere tollerato in quanto il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)$ è chiaramente incondizionato.

Sono ovvie o quasi ovvie le seguenti affermazioni.

i) Ogni punto ha L-misura nulla.

ii) Ogni sottoinsieme di un insieme di L-misura nulla ha L-misura nulla (in particolare l'insieme vuoto ha L-misura nulla)

iii) Ogni insieme al più numerabile ha L-misura nulla, in particolare l'insieme dei numeri algebrici ha L-misura nulla. (Infatti sia $S = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un insieme numerabile ordinato in una successione e sia $\varepsilon > 0$. L'unione degli intervalli $(x_n - \varepsilon/2^{n+1}, x_n + \varepsilon/2^{n+1})$ copre S e la somma $\sum_{n=1}^{\infty} 2\varepsilon/2^{n+1}$ delle loro lunghezze vale ε.) Usando la stessa tecnica e un noto teorema sulla numerabilità, è agevole provare che ogni insieme che sia esprimibile come unione al più numerabile di insiemi di L-misura nulla ha L-misura nulla.

Osservazione 0.3 Vale la pena di osservare che se, nella Definizione 0.1, la successione $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ di intervalli viene sostituita da una sequenza finita di intervalli, la famiglia di insiemi risultante è molto più povera, ad esempio non contiene più l'insieme dei razionali (dimostrarlo!). Le due definizioni risultano tuttavia equivalenti se applicate ad insiemi compatti. Perché?

È possibile mostrare che nessun intervallo non banale ha L-misura nulla (e certo non è un fatto sorprendente); ne segue che ogni insieme di L-misura nulla ha interno vuoto. Esistono però insiemi non numerabili che hanno L-misura nulla, come mostra il seguente notevole esempio, prototipo degli insiemi frattali e base per contro-esempi di notevole portata.

Esempio 0.4 (Insieme ternario di Cantor) Si consideri l'insieme C^1 costituito dall'intervallo [0,1] privato del suo terzo medio, l'intervallo aperto (1/3,2/3): dunque $C^1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Si ottenga ora C^2 da C^1 privando ognuno dei due intervalli la cui unione costituisce C^1 del relativo terzo medio: dunque $C^2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Si prosegua quindi allo stesso modo, ottenendo, per ogni n, C^n da C^{n-1} privando del relativo terzo medio ognuno degli intervalli la cui unione costituisce C^{n-1}. Ogni C^n è dunque unione di un numero finito di intervalli chiusi, il doppio di quanti, con la loro unione, compongono C^{n-1}.

Essendo intersezione di compatti inscatolati non vuoti, C è un compatto non vuoto. In effetti contiene infiniti punti, in particolare infiniti numeri triadici (fatto banale da constatare): quello che però può risultare sorprendente è che C ha la cardinalità del continuo. Infatti, se si esprimono i numeri reali in numerazione ternaria (cifre 0, 1, 2, evitando il periodo 2), le rappresentazioni dei numeri di C (che è un sottoinsieme di [0,1]) sono, a meno di una quantità numerabile, tutti gli allineamenti possibili costituiti dalle sole cifre 0 e 2 che iniziano con la cifra 0. Non è difficile verificare che C è un insieme perfetto (cioè coincide con il suo derivato, fatto questo che, in conseguenza di un noto teorema, conferma che la cardinalità di C non può essere quella del numerabile). Infine, che sia $m(C) = 0$ è immediata conseguenza del fatto che, per ogni n, C^n copre C ed è unione finita di intervalli la somma delle cui lunghezze vale $2^{n-1}/3^n \to 0$ per $n \to \infty$ (v. anche l'Osservazione 02). Da $m(C) = 0$ o, più naturalmente, dal processo di costruzione di C, segue che C ha interno vuoto: essendo chiuso, coincide dunque con la sua frontiera.

Nel seguito di questa nota, l'integrabilità e i concetti relativi sono intesi secondo Riemann.

La caratterizzazione significativa dell'integrabilità che è oggetto di questa nota non fa riferimento diretto alle definizioni classiche (Riemann, Cauchy) di integrale, dunque alle partizioni dell'intervallo di integrazione. È espressa dal seguente teorema la cui dimostrazione, un po' delicata ma non complessa, richiede strumenti non disponibili nel contesto di questo corso e quindi viene omessa.

Teorema 0.5 *Una funzione limitata su un intervallo (limitato) (a, b) è integrabile su (a, b) se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità in (a, b) ha L-misura nulla (viene spesso usata la terminologia "se e solo se è L-quasi ovunque continua su (a, b)").*

Alcune importanti conseguenze/applicazioni di questo teorema sono le seguenti.

a) Se (a, b) è un intervallo (limitato) e g è una funzione limitata su (a, b) "meno discontinua" di una funzione f integrabile su (a, b) (nel senso che l'insieme dei punti di discontinuità di g è contenuto nell'insieme dei punti di discontinuità di f), allora anche g è integrabile su (a, b).

b) $\mathcal{R}\big((a, b)\big)$ è uno spazio lineare (fatto già dimostrato per altra via), anzi un'algebra (con unità) poichè è chiuso anche rispetto al prodotto (nel senso puntuale, come la somma). Che cosa si può dire circa il confronto fra l'integrale del prodotto e il prodotto degli integrali?

c) Funzioni continue di funzioni integrabili sono integrabili.

d) Ogni funzione strettamente positiva integrabile ha integrale strettamente positivo (infatti deve essere continua in qualche punto).

e) Limiti uniformi di funzioni integrabili sono integrabili (questo fatto verrà adeguatamente spiegato e illustrato nel corso di Analisi Matematica 3).

f) Sia (S, d) uno spazio metrico. Si dice che una proprietà $\mathcal{P}$ vale *localmente in* S se ogni punto di S ammette un intorno su cui vale $\mathcal{P}$. Naturalmente, se $\mathcal{P}$ vale localmente in S, allora vale su qualsiasi compatto contenuto in S e il viceversa è vero in ogni spazio metrico localmente compatto (cioè tale che ogni punto possieda qualche intorno compatto, ad esempio $\mathbb{R}^d$ euclideo).

Sia f una funzione localmente integrabile su un intervallo I (aperto, chiuso o nè aperto nè chiuso) e sia $a \in I$. Allora la funzione $x \to \int_a^x f$, che risulta ovviamente definita su tutto I, è derivabile su I tranne al più su un insieme di L-misura nulla.

Un esempio di funzione R-integrabile su [0,1], l'insieme dei cui punti di discontinuità sia più che numerabile, è la funzione caratteristica del ternario di Cantor C sopra costruito. Infatti la funzione caratteristica di un insieme è discontinua esattamente nei punti di frontiera dell'insieme (dimostrarlo!).

Osservazione 0.6 Conviene notare che, per una generica funzione f, le due seguenti proprietà

- *f è continua salvo al più su un insieme di L-misura nulla*
- *f coincide con qualche funzione continua g salvo al più su un insieme di L-misura nulla*

sono sghembe. Fornire contro-esempi in proposito.