La derivazione per funzioni complesse di una variabile complessa

Premettiamo la seguente osservazione, elementare ma fondamentale.

È ben noto che, fissata una base in $\mathbb{R}^2$ rispetto alla quale il generico vettore di $\mathbb{R}^2$ abbia coordinate (x, y), la generica mappa lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ può venire descritta in modo univoco da una matrice a 4 entrate reali libere $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ che opera nel modo seguente (usuale prodotto righe per colonne): $T\big((x, y)\big) = (ax + by, cx + dy)$. Per quanto riguarda le operazioni di gruppo additivo e la metrica, $\mathbb{C}$ euclideo è identificabile con $\mathbb{R}^2$ euclideo dotato di una base ortonormale rispetto alla quale le coordinate di un numero complesso siano la sua parte reale e la sua parte immaginaria; non così per le operazioni di campo: vi è definito un prodotto rispetto al quale sono lineari soltanto le trasformazioni che corrispondono a roto-omotetie su $\mathbb{R}^2$. Esplicitamente, affinché la trasformazione T di cui sopra, applicata al vettore di $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ corrispondente al numero complesso $z = x + iy$, rappresenti una traformazione lineare $\tilde{T}$ di $\mathbb{C}$ in sè, dunque del tipo $\tilde{T}(z) = \alpha z = (a + ib)(x + iy) = ax - by + i(ay + bx)$ dove $\alpha = a + ib$, occorre che la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sia della forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (due sole entrate libere).

Dal momento che la differenziazione è un'operazione di approssimazione lineare e che l'identificazione sopra descritta tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$ euclidei risulta un isomorfismo di gruppo e un'isometria, l'osservazione appena fatta indica quanto segue: affinché la funzione complessa $\tilde{f}$ della variabile complessa z sia differenziabile nel punto $z_0 = x_0 + iy_0$, occorre e basta che la funzione $\underline{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, "associata" naturalmente alla funzione $x + iy \to \tilde{f}(x + iy)$ nel modo seguente

$$\underline{f}(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$$

dove

$$\operatorname{Re} \tilde{f}(x + iy) = u(x, y), \qquad \operatorname{Im} \tilde{f}(x + iy) = v(x, y),$$

sia differenziabile nel punto (x_0, y_0) con matrice Jacobiana della forma

$$\begin{pmatrix} u'_x(x_0, y_0) & u'_y(x_0, y_0) \\ v'_x(x_0, y_0) = -u'_y(x_0, y_0) & v'_y(x_0, y_0) = u'_x(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \tag{0.1}$$

Sia ora $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto non vuoto; senza pericolo di ambiguità denotiamo ancora con Ω la sua immagine in $\mathbb{C}$ associata dalla corrispondenza naturale sopra descritta tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$ (si ricordi che tale corrispondenza risulta un omeomorfismo in quanto è un'isometria). Se imposte in Ω, le due uguaglianze esposte nella seconda riga di (0.1) prendono il nome di *condizioni di monogeneità* o *equazioni di Cauchy-Riemann*. Si tratta di una coppia di equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine. È possibile mostrare che, se tali condizioni sono rispettate in Ω da una funzione continua $\underline{f}$, la corrispondente funzione $\tilde{f}$ di variabile complessa, che viene detta *olomorfa su* Ω, risulta infinite volte derivabile in Ω; ne segue che la funzione $\underline{f}$ risulta di classe $C^{(\infty)}$ su Ω. L'affermazione cade se tali condizioni valgono in qualche punto senza valere in tutto un suo intorno: si consideri ad esempio l'origine per la funzione $\tilde{f}(z) = z|z|$. Le funzioni olomorfe costituiscono la base di partenza per lo studio delle funzioni analitiche, che godono della proprietà di essere globalmente determinate dal loro comportamento locale in qualsiasi punto del loro dominio.

Per una funzione complessa $\tilde{f}$ della variabile complessa z, avendo a disposizione nel campo complesso l'operazione di quoziente, è ovviamente possibile definire la derivata in z_0 come limite (qualora esista in $\mathbb{C}$), al tendere (comunque) di h a 0, del rapporto incrementale

$$\frac{\tilde{f}(z_0 + h) - \tilde{f}(z_0)}{h} \tag{0.2}$$

ed è chiaro che l'esistenza di tale derivata $\tilde{f}'(z_0)$ equivale (esattamente come accade per funzioni di una variabile reale) alla differenziabilità di $\tilde{f}$ in z_0. In particolare, qualora $\tilde{f}'(z_0)$ esista, imponendo ad h di assumere solo valori reali o solo valori immaginari, tenendo presente che il numero complesso $\tilde{f}'(z_0)$ è univocamente determinato e riscrivendo (0.2) in termini di $\underline{f}$ anziché di $\tilde{f}$, si ri-ottengono le condizioni di monogeneità.