Esercizi di Istituzioni di Analisi Superiore II – N. 1

Studenti del C.L. in Matematica - Dott. Kevin R. Payne

Esercizio 1. Sia $\phi : (a,b) \in \mathbf{R}$. Mostrare che ϕ è convessa se e solo se l'epigrafico di ϕ è convesso. Si ricorda che l'epigrafico è definito da

$$\mathrm{Epi}(\phi) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \quad a < x < b, \ y \geq \phi(x)\}$$

Esercizio 2. Completare la dimostrazione del **Lemma:** *Sia $\phi : (a,b) \to \mathbf{R}$. Allora ϕ è convessa se e solo se*

$$\forall s,t,u \in (a,b) : s,t < u \Rightarrow \Phi(s,t) \leq \Phi(s,u) \leq \Phi(t,u)$$

dove $\Phi(s,t) = (\phi(t) - \phi(s))/(t-s))$ per $s \neq t$ sono i rapporti incrementali.

Esercizio 3. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ lo spazio di misura dove $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$, $\mathcal{M} = 2^X$ l'insieme delle parti di X e $\mu(\{p_i\}) = \alpha_i$ con $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Verificare che $(X, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio di misura e mostrare (usando la disuguaglianza di Jensen) la disuguaglianza: Se $y_1, \ldots, y_n > 0$ allora

$$y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i.$$

Esercizio 4. Mostrare la seguente generalizzazione della disuguaglianza di Jensen: *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Siano $\Omega \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(\Omega) < +\infty$, $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ tale che $a < f(x) < b$ per ogni $x \in \Omega$ e $\phi : (a,b) \in \mathbf{R}$ convessa. Allora*

$$\phi(\langle f \rangle) \leq \langle \phi \circ f \rangle$$

dove $\langle f \rangle = \mu(\Omega)^{-1} \int_\Omega f \, d\mu$ è il valor medio di f.

Esercizio 5. Sia $\alpha > 0$. Trovare $p \in (0, +\infty]$ tale che $\{a_n\} \in l^p$ dove $a_n = n^{-\alpha}$.

Esercizio 6. Siano $\alpha > 0, p \in (0, +\infty]$. Denotiamo $||x|| = (x_1^2 + \cdots x_n^2)^{1/2}$ è la norma in $\mathbf{R}^n$ e $D(0;1) = \{x \in \mathbf{R}^n : ||x|| < 1\}$.

a) Trovare p per cui $f(x) = 1/(1 + ||x||^\alpha) \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^n)$.
b) Trovare p per cui $f(x) = ||x||^{-\alpha} \in \mathcal{L}^p(D(0;1))$.

Esercizio 7. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Sia $f : X \to \mathbf{C}$ misurabile. Mostrare

a) $||f||_\infty = \text{ess sup}(|f|) \leq \sup(f)$
b) $||f||_\infty \leq \lambda \Leftrightarrow |f(x)| \leq \lambda$ q.o. in X.

Esercizio 8. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Mostrare che

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{f : X \to \mathbf{C} : f \text{ misurabile e } ||f||_\infty < +\infty\}$$

è uno spazio vettoriale e che $||f||_\infty = \text{ess sup}(|f|)$ è una semi-norma.