Esercizi di Istituzioni di Analisi Superiore II – N. 4

Studenti del C.L. in Matematica - Dott. Kevin R. Payne

Esercizio 1. Mostrare che gli spazi H sotto sono spazi pre-Hilbert; cioè che sono spazi vettoriali con prodotto scalare $(\cdot, \cdot)$.

a) $H = \mathbf{R}^n$ con $(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$

b) $H = \mathbf{C}^n$ con $(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$

c) $H = L^2(X, \mu)$ con $(f, g) = \int_X f \bar{g}\, d\mu$

d) $H = l^2$ con $(\{a_n\}, \{b_n\}) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \overline{b_j}$

Esercizio 2. Mostrare che $C^0([0,1]; \mathbf{R})$ fornito con $(f, g) = \int_0^1 fg\, dx$ è uno spazio pre-Hilbert ma **non** è completo.

Esercizio 3. Sia H uno spazio di Hilbert con norma $||x|| = (x, x)^{1/2}$.

a) Mostrare che $|| \cdot || : H \to [0, +\infty)$ è continua e strettamente convessa.

b) Verificare la *legge della parallelogramma*:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2, \quad x, y \in H$$

Esercizio 4. Mostrare che $L^p([0,1]; \mathbf{R})$ non soddisfa la legge della parallelogramma se $p \neq 2$

Esercizio 5. Sia X uno spazio di Banach complesso con norma $|| \cdot ||$ che soddisfa la legge della parallelogramma. Mostrare che la formula

$$(x, y) = \frac{1}{4} \left\{ \left[||x + y||^2 - ||x - y||^2 \right] + i \left[||x + iy||^2 - ||x - iy||^2 \right] \right\}$$

definisce un prodotto scalare su X per cui $||x|| = (x, x)^{1/2}$. Quindi X è uno spazio di Hilbert.

Esercizio 6. Sia H uno spazio di Hilbert e sia M uno suo sottospazio. Verificare le seguente affermazioni:

a) Il complemento ortogonale $M^\perp = \{x \in H : \quad (x, y) = 0 \ \forall y \in M\}$ di M è uno sottospazio chiuso.

b) $M^\perp \cap M = \{0\}$

c) $\left(M^\perp\right)^\perp = \overline{M}$ la chiusura di M in H.

N.B. Sulla base di **a) - c)** si può dire che $H = M \oplus M^\perp$ se M è chiuso e $H = \overline{M} \oplus M^\perp$ in generale.