Esercizi di Istituzioni di Analisi Superiore II – N. 6

Studenti del C.L. in Matematica - Dott. Kevin R. Payne

Esercizio 1. *(Completezza di sistemi ortonormali)* Sia $K = \{u_\alpha : \alpha \in A\}$ un insieme ortonormale in H uno spazio di Hilbert. Mostrare che le seguente quattro affermazioni sono equivalenti.

a) K è completo; cioè $K^\perp = \{0\}$ ovvero K è massimale.

b) L'insieme S di tutte le combinazioni lineari finiti di elementi di K è denso in H.

c) K è una base ortonormale in H.

d) Vale *l'identità di Parseval*: Per ogni $x \in H$

$$||x||^2 = \sum_{\alpha \in A_x} |(x, u_\alpha)|^2$$

dove $A_x = \{\alpha \in A : \quad (x, u_\alpha) \neq 0\}$ che abbiamo mostrato di essere al più numerabile.

Esercizio 2. *(Polinomi di Tchebyschev)* Usando il procedimento di Gram-Schmidt e cominciando dall'insieme $S = \{1, x, x^2, \ldots\}$ trovare i primi elementi di un insieme ortonormale ripetto il prodotto scalare dato.

a) *Polinomi di Legendre:* $H = L^2([0,1], dx)$

b) *Polinomi di Hermite:* $H = L^2(\mathbf{R}, e^{-x^2}\, dx)$

c) *Polinomi di Laguerre:* $H = L^2((0, +\infty), e^{-x}\, dx)$

Esercizio 3. Sia $L : C^2([0,l]) \to C^0([0,l])$ l'operatore differenziale definito da $Lf(x) = -f''(x)$. Considerare il problema degli autovalori/autofunzioni di L con condizioni di Neumann al bordo; cioè (u, μ) tali che

$$Lu = \mu u \quad \text{in} \quad (0,l) \quad \text{e} \quad u'(0) = 0 = u'(l).$$

Mostrare che esiste un insieme infinito e ortonormale di autofunzioni $K = \{u_k\}_{k=1}^{+\infty}$ associati ad una successione di autovalori reali $\mu_k \to +\infty$ e che u_k possono essere scelte a valori reali.

Esercizio 4. (vedi Esercizi 14 e 15 di Rudin, cap. 4).

Esercizio 5. *(Il cubo di Hilbert)* Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita con insieme ortonormale $K = \{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Definiamo $\mathcal{Q} = \{x \in H : \quad x = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n u_n, \quad c_n \in \mathbf{C}, |c_n| \leq 1/n\}$.

a) Mostrare che $\mathcal{Q}$ è compatto

b) Più generalmente $\mathcal{Q}$ è compatto se e solo se i coefficienti c_n soddisfano $\{c_n\} \in l^2$.

Esercizio 6. Sia $f(x) = 1/x^\alpha$ con $\alpha > 0$. Trovare la relazione fra p ed α per cui $f \in W^{1,p}(0,1)$. Ricordiamo che $W^{1,p}(0,1)$ è la chiusura di $C^0(0,1)$ rispetto alla norma

$$||u||^p_{W^{1,p}} = \int_0^1 |u|^p + |u'|^p\, dx.$$

Pensare alle generalizzazioni possibili in dimensione $N > 1$.