Esercizi di Istituzioni di Matematica – N.10

Studenti del C.S. in Informatica - Dott. Kevin R. Payne

Per gli esercizi N.1 - N.6 calcolare la funzione derivata f' della funzione f data specificando il dominio di f e quello di f'.

Esercizio 1. $f(x) = x + \sin x \cos x$.

Soluzione: Si trova $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(f') = \mathbf{R}$ e $f'(x) = -\sin^2 x + \cos^2 x + 1 = 2\cos^2 x$ usando le regole della somma/del prodotto e le derivate delle funzioni elementari sin e cos.

Esercizio 2. $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$.

Soluzione: Si trova $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(f') = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ e $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}$ usando la regole del rapporto e le derivate di funzioni elementari.

Esercizio 3. $f(x) = (x \ln x - x)^3$.

Soluzione: Si trova $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(f') = (0, +\infty)$ e $f'(x) = 3 \ln x (x \ln x - x)^2$ usando la regole della catena e la derivata della funzione elementare $\ln x$.

Esercizio 4. $f(x) = \arctan(2^x)$.

Soluzione: Si trova $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(f') = \mathbf{R}$ e $f'(x) = \dfrac{(\ln 2) 2^x}{1 + 2^{2x}}$ usando la regole della catena e le derivate delle funzioni elementari $\arctan x$ e $2^x = e^{x \ln 2}$.

Esercizio 5. $f(x) = e^{\sin(\ln x)}$.

Soluzione: Si trova $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(f') = (0, +\infty)$ e $f'(x) = e^{\sin(\ln x)} \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ usando la regola della catena e le derivate di funzioni elementari.

Esercizio 6. $f(x) = (\cos x)^{1/x}$.

Soluzione: Scrivendo la funzione data come

$$(\cos x)^{1/x} = e^{(1/x)\ln(\cos x)}$$

si trova

$$\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(f') = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (-\pi/2 + 2\pi k, \pi/2 + 2\pi k) \setminus \{0\}$$

e

$$f'(x) = (\cos x)^{1/x} \left[-\frac{\ln(\cos x)}{x^2} - \frac{\tan x}{x} \right]$$

usando la regole della catena e le derivate di funzioni elementari.

Esercizio 7. Trovare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = e^{-x^2}$ passante per il punto $(1, f(1))$.

Soluzione: L'equazione della retta tangente che passa per $(x_0, f(x_0)$ è $y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Si trova

$$y = \frac{1}{e} - \frac{2}{e}(x-1)$$

Esercizio 8. Trovare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \sinh(\arctan x)$ passante per il punto $(-1, f(-1))$.

Soluzione: La risposta è

$$y = \sinh(-\pi/4) + \frac{1}{2}\cosh(-\pi/4)(x+1)$$

dove si ricorda $\arctan(-1) = -\pi/4$.

Esercizio 9. Trovare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = 4x^3 + 1$ passante per l'origine.

Soluzione: La risposta è $y = 3x$. Infatti si cerca $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dove x_0 deve soddisfare la relazione

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(0 - x_0).$$

Si risolve per x_0 trovando $x_0 = 1/2$ e si trova l'equazione della retta tangente.

Esercizio 10. Sia $f(x) = x^2 - x^4$. Trovare gli intervalli in cui f è crescente/decrescente e gli estremi locali di f.

Soluzione: Calcolando la derivata $f'(x) = 2x - 4x^3$ e analizzando il segno di f' si trova che f è strettamente crescente negli intervalli $(-\infty, -1/\sqrt{2}]$ e $[0, 1/\sqrt{2}]$; f è strettamente decrescente negli intervalli $[-1/\sqrt{2}, 0]$ e $[1/\sqrt{2}, +\infty)$. Segue che $0 = f(0)$ è un minimo locale e $-1/4 = f(\pm 1/\sqrt{2})$ sono massimi locali.

Esercizio 11. Trovare il numero di estremi locali per la funzione definita da $f(x) = x^4 - 4x^3 + \alpha x^2 + 2$ dove $\alpha \in \mathbf{R}$.

Soluzione: Si analizza il segno della derivata $f'(x) = 2x[2x^2 - 6x + \alpha]$. Si trova 4 casi che dependono sul valore di α e del valore di $\Delta = 9 - 2\alpha$: **i)** $\alpha \geq 9/2$: c'è un minimo locale in $x = 0$; **ii)** $0 < \alpha < 9/2$: ci sono minimi locai in $x = 0$ e $x_+ = (3 + \sqrt{\Delta})/2$ e c'è un massimo locale in $x_- = (3 - \sqrt{\Delta})/2$; **iii)** $\alpha = 0$: c'è un minimo locale in $x = 3$; **iv)** $\alpha < 0$: ci sono minimi locali in $x_\pm = (3 \pm \sqrt{\Delta})/2$ e c'è un massimo locale in $x = 0$.