Esercizi di Istituzioni di Matematica – N.13

Studenti del C.S. in Informatica - Dott. Kevin R. Payne

Esercizio 1. Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{-2}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$

Suggerimento: Usare la sostituzione $u = \sqrt{x}$

Soluzione: La risposta è $-4\arctan(\sqrt{x}) + C$ dove $C \in \mathbf{R}$ arbitrario e il dominio della formula è $(0, +\infty)$. Seguendo il suggerimento si trova $du = (x^{-1/2}/2)dx$ e

$$\int \frac{-2}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \int \frac{-4u}{u(u^2+1)}\,du = -4\int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

da cui segue il risultato dove si nota che il dominio della funzione integranda è $(0, +\infty)$.

Esercizio 2. Calcolare l'integrale indefinito $\int \left(xe^{x^2} + 4\frac{\ln x}{x}\right) dx$

Soluzione: La risposta è $e^{x^2}/2 + 2\ln^2 x + C, x > 0$. Si può dividire l'integrale in due pezzi

$$\int xe^{x^2}\,dx + 4\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int e^u\,du + 4\int v\,dv$$

dove abbiamo fatto le sostituzioni $u = x^2$ nel primo integrale e $v = \ln x$ nel secondo.

Esercizio 3. Calcolare l'integrale indefinito $\int \ln^2 x\,dx$

Soluzione: La risposta è $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C, x > 0$. Ricordiamo la formula di integrazione per parti: *Siano $u = f(x)$ e $g = v(x)$ derivabili con derivate integrabili. Allora*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.$$

Usando questa formula con $u = \ln^2 x$ e $dv = dx$ si trova

$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - \int 2\ln x\,dx$$

Un altra applicazione di integrazione per parti con $u = \ln x$ e $dv = dx$ dà il risultato.

Esercizio 4. Calcolare l'integrale definito $\int_1^e \left(x\ln x + \frac{e^x}{e^{2x}+1}\right) dx$

Soluzione: La risposta è $(e^2+1)/4 + \arctan(e^e) - \arctan(e)$. Si può dividere il conto in due pezzi $I = I_1 + I_2$ dove

$$I_1 = \int_1^e x\ln x\,dx \quad \text{e} \quad I_2 = \int_1^e \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

Nel primo si applica integrazione per parti con $u = \ln x$ e $dv = xdx$

$$I_1 = \frac{1}{2}x^2 \ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = (e^2+1)/4.$$

Nel secondo si può fare una sostituzione $u = e^x$ trovando $du = e^x\,dx$ e

$$I_2 = \int_e^{e^e} \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan u|_e^{e^e}$$

Esercizio 5. Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{(\sqrt{x}+1)^2}\,dx$

Suggerimento: Usare la sostituzione $u = \sqrt{x}$.

Soluzione: La risposta è $-16/3 + 6\ln 3$. Seguendo il suggerimento si trova che l'integrale dato I può essere scritto nella forma

$$I = \int_0^2 \frac{2u^3}{(u+1)^2}\,du = 2\int_0^2 \frac{u^3}{u^2+2u+1}\,du$$

La funzione integranda è razionale con il grado del numeratore maggiore di quello del denominatore e quindi ci conviene dividere

$$\frac{u^3}{u^2+2u+1} = u - 2 + \frac{3u+2}{u^2+2u+1} = u - 2 + 3\left(\frac{1}{u+1}\right) - \frac{1}{(u+1)^2}$$

Si trova

$$I = 2\left[\frac{1}{2}u^2 - 2u + 3\ln(|u+1|) + \frac{1}{u+1}\right]\Bigg|_0^2$$

da cui segue il risultato.

Esercizio 6. Sia $f : [-1,2] \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x/(x-1) & -1 \le x < 0 \\ e^x/(e^x+1) & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

Mostrare che f è integrabile secondo Riemann e calcolare l'area sotto grafico di f; cioè l'area della regione limitata dal grafico di f l'asse x e le rette $x = -1$ e $x = 2$.

Soluzione: La funzione f data è *continua a tratti* nell'intervallo limitato $[-1,2]$; cioè f è continua in $[-1,2]\setminus\{0\}$ e si presenta solo un salto in $x = 0$. Infatti $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1/2$ ma $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Quindi f è inhtegrabile secondo Riemann nell'intervallo $[-1,2]$ e vale

$$\int_{-1}^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 \frac{x}{x-1}\,dx + \int_0^2 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx.$$

Si nota che la funzione data soddisfa $f(x) \geq 0$ per $x \in [-1,2]$ e quindi l'area è data dall'integrale

$$A = \int_{-1}^{2} f(x)\, dx$$

Si integra facilmente il primo pezzo notando $x/(x-1) = 1 + 1/(x-1)$ e il secondo tramite una sostituzione $u = e^x$:

$$A = [x + \ln(|x-1|)]|_{-1}^{0} + [\ln(e^x+1)]|_0^2 = 1 - 2\ln 2 + \ln(e^2+1).$$

Esercizio 7. Sia $f : [-3,1] \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[5]{x+2} & -3 \leq x < 0 \\ x\ln(x+2) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Mostrare che f è integrabile secondo Riemann e calcolare il valor medio di f nell'intervallo $[-3,1]$.

Soluzione: Di nuovo la funzione f è integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[-3,1]$ essendo continua a tratti. Questa volta f è chiaramente continua in $[-3,1] \setminus \{0\}$ e c'è un salto solo in $x = 0$ ($f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \sqrt[5]{2}$.). Ricordiamo la definizione: *Sia f integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ allora il valor medio di f nell'intervallo è*

$$\bar{f}_{[a,b]} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

Quindi abbiamo

$$\bar{f}_{[-3,1]} = \frac{1}{4}[I_1 + I_2]$$

dove

$$I_1 = \int_{-3}^{0} (x+1)^{1/5} = \frac{5}{6}\left(2^{6/5} - 1\right)$$

e

$$I_2 = \int_0^1 x\ln(x+2)\, dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x+2)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_1^0 \frac{x^2}{(x+2)}\, dx$$

dove abbiamo applicato la formula di integrazione per parti. Per l'integrale che rimane si divide $x^2/(x+2) = x - 2 + 4/(x+2)$ trovando

$$I_2 = \frac{\ln 3}{2} + \frac{3}{4} - 2\ln 3 + 2\ln 2.$$

Segue che il valor medio vale $\frac{5}{24}2^{6/5} - \frac{1}{48} - \frac{3}{8}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 2.$

Esercizio 8. Calcolare l'area della regione nel piano (x,y) limitata dalle curve $y = \sin x$, $y = x^2 - 2x$, $x = 0$, $x = \pi/2$.

Soluzione: Ricordiamo che l'area di una regione limitata dai grafici delle funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ dove $g(x) \leq f(x)$ in $[a, b]$ é calcolato tramite l'integrale

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx.$$

Qui $f(x) = \sin x \geq x^2 - 2x = g(x)$ nell'intervallo $[a, b] = [0, \pi/2]$. Segue che

$$A = \int_0^{\pi/2} \left(\sin x - x^2 + 2x\right)\ dx = 1 + \pi^2/4 - \pi^3/24.$$