Esercizi di Istituzioni di Matematica – N.14

Studenti del C.S. in Informatica - Dott. Kevin R. Payne

Esercizio 1. Calcolare l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x-2)^{1/3}}\,dx$ (giustificando la risposta).

Soluzione: La risposta è $-12/5$. Si nota che la funzione integranda $f(x) = x/(x-2)^{1/3}$ **non** è limitata in $[1,2)$ essendo $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ e quindi si deve calcolare l'integrale in senso generalizzato. Si calcola il limite

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \lim_{b\to 2^-} \int_1^b f(x)\,dx$$

dove f è continua in $[1,b]$ per ogni $b \in (1,2)$ e quindi integrabile secondo Riemann in $[1,b]$. Usando integrazione per parti con $u = x$ e $dv = (x-2)^{-1/3}dx$ si trova

$$\int_1^b \frac{x}{(x-2)^{1/3}}\,dx = \frac{3}{2}x(x-2)^{2/3}\Big|_1^b - \frac{3}{2}\int_1^b (x-2)^{2/3}\,dx.$$

Calcolando l'ultimo integrale si trova

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \lim_{b\to 2^-} \left[\frac{3x(x-2)^{2/3}}{2} - \frac{9(x-2)^{5/3}}{10}\right]\Bigg|_1^b = -\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{10}\right) = -\frac{12}{5}.$$

Esercizio 2. Calcolare l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ (giustificando la risposta).

Soluzione: La risposta è $\pi/4$. Essendo il dominio di integrazione illimitato l'integrale deve essere calcolato in senso generalizzato. D'altre parte la funzione integranda $f(x) = e^x/(e^{2x}+1)$ è continua in $[0,b)$ per ogni $b > 0$ e quindi ha senso calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\arctan(e^x)\big|_0^b\right].$$

Quindi l'integrale vale

$$\lim_{b\to+\infty} \left[\arctan(e^b) - \arctan(1)\right] = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4.$$

AVVISO: Gli esercizi 3-4 sotto sono di carattere più teorico rispetto gli altri; cioè molto dello stile di Analisi Matematica I.

Esercizio 3. Considerare l'integrale generalizzato

$$\int_{-1}^2 \frac{\ln(1+x)}{\sin^{1/3}(1-x^{1/3})}\,dx$$

Stabilire l'ordine di infinito della funzione integranda nei punti singolari e dire se l'integrale è convergente.

Soluzione: La funzione integranda f data è definita in $(-1,1) \cup (1,2]$ ed è continua. Basta considerare il comportamento di f nei punti singolari $x = -1$ (dove il numeratore $\ln(x+1)$ diventa infinita) e $x = 1$ (dove il denominatore diventa 0). In $x = -1$ si trova

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin^{1/3}(1-x^{1/3})} \sim \frac{\ln(x+1)}{\sin^{1/3}(2)} \quad \text{per} \quad x \to -1^+$$

Usando il fatto che $\ln(x+1)$ è infinito di ordine inferiore ad α per ogni $\alpha > 0$ rispetto all'infinito campione $(x-1)^{-1}$ si trova che f è integrabile in senso generalizzato in un intorno destro di $x = -1$. In $x = 1$ si trova

$$f(x) \sim \frac{\ln(2)}{\sin^{1/3}(1-x^{1/3})} \sim \frac{\ln(2)}{(1-x^{1/3})^{1/3}} \quad \text{per} \quad x \to 1$$

dove abbiamo usato $\sin^{1/3} y \sim y^{1/3}$ per $y \to 0$. Inoltre si vede

$$1 - x^{1/3} = 1 - (1-(1-x))^{1/3} \sim 1 - (1-(1-x)/3) = (1-x)/3 \quad \text{per} \quad x \to 1$$

Quindi si ha

$$f(x) \sim \frac{\ln(2) 3^{1/3}}{(1-x)^{1/3}}$$

e f è infinito di ordine $1/3 < 1$ rispetto all'infinito campione $(1-x)^{-1}$ e quindi è integrabile in senso generalizzato in un intorno di $x = 1$.

Esercizio 4. Considerare l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x^2} - e^{1/x}}{x^\alpha} \, dx$$

Trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ per cui l'integrale è convergente.

Soluzione: Sfruttando lo sviluppo di e^y per $y \to 0$ si trova

$$f(x) = \frac{e^{1/x^2} - e^{1/x}}{x^\alpha} = \frac{-1/x + o(1/x)}{x^\alpha} = -\frac{1}{x^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}\right) \quad \text{per} \quad x \to +\infty$$

Quindi f è integrabile in senso generalizzato se e solo se $\alpha + 1 > 1$ ovvero $\alpha > 0$.

Esercizio 5. Considerare la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_{\sqrt{x+1}}^{x^2+1} \left(e^{t^2} + e^{-t^2}\right) dt$$

Mostrare che F è derivabile in $x_0 = 0$ e scrivere l'equazione della retta tangente in tal punto.

Soluzione: Si nota che $f(t) = e^{t^2} + e^{-t^2}$ è continua su $\mathbf{R}$ e quindi integrabile su ogni intervallo $[a, b]$ in $\mathbf{R}$. Quindi F è definita per ogni x tale che $\sqrt{x+1}$ ha senso; cioè per ogni $x \geq 1$. Si può scrivere

$$F(x) = \int_{\sqrt{x+1}}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{x^2+1} f(t)\,dt$$

dove $c \in \mathbf{R}$ fissato. Quindi si ha

$$F(x) = G(x^2+1) - G(\sqrt{x+1}) \quad \text{dove} \quad G(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

Essendo f continua su $\mathbf{R}$ la funzione G è di classe $C^1(\mathbf{R})$; cioè G è derivabile con deivata $G'(x) = f(x)$ continua. La funzione $x^2 + 1$ è derivabile in $\mathbf{R}$ e la funzione $\sqrt{x+1}$ è derivabile in $(-1, +\infty)$. Quindi F è derivabile in $(-1, +\infty)$ ed in particolare in $x_0 = 0$. Inoltre usando la regola della catena si calcola la derivata di F

$$F'(x) = G'(x^2+1)\,[2x] - G'((x+1)^{1/2})\left[\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}\right]$$

dove $G'(x) = f(x)$. Si trova

$$F'(0) = f(1)\,[0] - f(1)\left[\frac{1}{2}\right] = -f(1)/2 = -(e + e^{-1})/2.$$

Si nota $F(0) = 0$ e quindi la retta tangente desiderata è

$$y = F(0) + F'(0)x = -\frac{(e+e^{-1})}{2}x.$$

Esercizio 6. Considerare la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_2^x \left(e^{t^2} + \frac{1}{t}\right)\,dt$$

Mostrare che F è due volte derivabile in $x_0 = 2$ e scrivere la formula di Taylor di grado 2 centrata in $x_0 = 2$ per F.

Soluzione: Essendo la funzione integranda $f(t) = e^{t^2} + 1/t$ continua in $(0, +\infty)$ la funzione integrale $F(x)$ è di classe C^1 in $(0, +\infty)$ e vale $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$. Inoltre $f(x)$ è derivabile nello stesso intervallo e quindi F è due volte derivabile in $(0, +\infty)$ e vale $F''(x) = f'(x) = 2xe^{x^2} - 1/x^2$. Essendo F due volte derivabile in $x_0 = 2$ possiamo scrivere la formula di Taylor di ordine 2

$$F(x) = F(2) + F'(2)(x-2) + \frac{1}{2}F''(2)(x-2)^2 + o((x-2)^2) \quad \text{per} \quad x \to 2.$$

Qui $F(2) = \int_2^2 f(t)\,dt = 0; F'(2) = f(2) = e^4 + 1/2; F''(2) = 4e^4 - 1/4$. Quindi si trova

$$F(x) = (e^4 - 1/2)(x-2) + (2e^4 - 1/8)(x-2)^2 + o((x-2)^2) \quad \text{per} \quad x \to 2.$$

Esercizio 7. Siano F e g le funzioni

$$F(x) = \int_0^x t^2 \left(e^{-t^2} - 1\right) dt \quad \text{e} \quad g(x) = \sin(x^5)$$

Calcolare se esiste il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{F(x)}{g(x)}$ giustificando la risposta.

Soluzione: Il limite dato ha una forma d'indecisione del tipo $(0/0)$ dove si nota che F e g sono derivabile in $\mathbf{R}$. Applicando la regole di De l'Hôpital si trova

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{g'(x)}$$

se quest'ultimo limite esiste. Si ha $F'(x) = x^2(e^{-x^2} - 1)$ usando il Teorema fondementale del calcolo integrale e si ha $g'(x) = 5x^4 \cos(x^5)$. Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{5x^2 \cos(x^5)}.$$

Si nota $e^{-x^2} - 1 = -x^2 + o(x^2)$ da cui si ottiene che il limite vale $-1/5$.

Esercizio 8. Trovare i valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per cui il limite $\lim_{x\to 0^+} F(x)/x^\alpha$ è finito diverso da 0 dove F è la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^{x^3} \sin(\sqrt{t})\, dt$$

Soluzione: La risposta è $\alpha = 9/2$. Si nota che $F(x) = G(x^3)$ dove $G(x) = \int_0^x \sin(\sqrt{t})\, dt$ è una funzione di classe $C^1([0, +\infty))$ usando il Teorema fondamentale del calcolo integrale ($f(t) = \sin(\sqrt{t})$ è continua in $[0, +\infty)$). Quindi $F \in C^1([0, +\infty))$ e vale $F'(x) = 3x^2 f(x^3)$. In particolare, F è continua in $x = 0$ e vale

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0) = 0$$

Ci sono 2 casi: $\alpha \leq 0$ e $\alpha > 0$. Se $\alpha \leq 0$ allora il limite sempre vale 0. D'altre parte per $\alpha > 0$ il limite ha una forma di indecisione $(0/0)$. Applicando la regola di De l'Hôpital si trova

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2 \sin(x^{3/2})}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\sin(x^{3/2})}{\alpha x^{\alpha-3}}$$

se questo limite esiste. Per $x \to 0^+$ si ha $\sin(x^{3/2}) \sim x^{3/2}$ e quindi il rapporto nel limite sopra è asintotico ad $3x^{3/2-\alpha+3}/\alpha$ che ha limite finito diverso da zero quando $3/2 - \alpha + 3 = 0$.