Esercizi di Istituzioni di Matematica – N. 6

Studenti del C.S. in Informatica - Dott. Kevin R. Payne

Esercizio 1. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sin^2(n)+\cos(n)}{n^3+2}\right)$

Soluzione: Usando la limitatezza di sin e cos, si trova

$$0 \leq \frac{\sin^2(n)+\cos(n)}{n^3+2} \leq \frac{2}{n^3+2}$$

da cui segue, dal criterio del confronto (due carabinieri), che il limite vale 0.

Esercizio 2. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left([\cos(n+1)]^2-(n+1)^2\right)$

Soluzione: La successione data ha la forma "limitata meno divergente" per cui si puo' applicare il criterio del confronto. Si trova

$$[\cos(n+1)]^2-(n+1)^2 \leq -n^2 \to -\infty$$

da cui segue che il limite è $-\infty$.

Esercizio 3. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2+\cos(n)}{4}\right)^n$

Soluzione: Si nota che $1 \leq (2+\cos(n)) \leq 3$ per ogni n. Quindi si ha

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \left(\frac{2+\cos(n)}{4}\right)^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

e usando il criterio del confronto ed il limite notevole: $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0 \quad \forall |q|<1$ risulta che il limite vale 0.

Esercizio 4. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\left(3^n-n^5\right)$.

Soluzione: Usando le proprietà algebriche del limite ed i limiti notevoli: **a)** $\forall q>1:\ \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ **b)** $\forall \alpha>0, a>0:\ \lim_{n\to+\infty} n^\alpha/a^n \to 0$ si trova che il limite vale $+\infty$. Infatti si ha

$$3^n-n^5 = 3^n\left(1-\frac{n^5}{3^n}\right)$$

dove il primo fattore tende a $+\infty$ e il secondo a 1.

Esercizio 5. Calcolare $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3n^2}\left(\frac{2^{n+1}+1}{3^n+2}\right)$.

Soluzione: Usando le proprietà algebriche del limite ed i limiti notevoli: **a)** $\forall a > 0: \ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ **b)** $\forall \alpha > 0: \ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$ **c)** $\forall |q| < 1: \ \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ si trova che il limite vale 0. Infatti si può riscrivere la successione data come

$$\sqrt[n]{3}\,\sqrt[n]{n^2}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{2+1/2^n}{1+2/3^n}\right)$$

dove i primi due fattori tendono ad 1 il terzo tende a 0 e il quarto a 2.

Esercizio 6. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3^n - 2(n!)}{(n+1)! + 4^n}$.

Soluzione: Usando le proprietà algebriche del limite ed il limite notevole: per ogni $\forall a > 0: \lim_{n\to+\infty} a^n/n! = 0$ si trova che il limite vale 0. Infatti la successione data è

$$\frac{n!}{n!}\left(\frac{3^n/n! - 2}{n+1+4^n/n!}\right)$$

dove nel secondo fattore il numeratore tende a -2 e il denominatore tende a $+\infty$.

Esercizio 7. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln^3 n}{n^2}$.

Soluzione: La successione data è

$$\left(\frac{\ln n}{n^{2/3}}\right)^3$$

per cui si applica il limite notevole: $\lim_{n\to+\infty} (\log_b n)/n^\alpha = 0$ con $b = e > 1$ e $\alpha = 2/3 > 0$. Il limite vale 0.

Esercizio 8. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log_{10}(n) - \sqrt{n}}{\ln n}$.

Soluzione: Usando le proprietà algebriche del limite la proprietà $\log_b n = \ln n/\ln 10$ ed il limite notevole: per ogni $\forall \alpha > 0, b > 1: \ \lim_{n\to+\infty} (\log_b n)/n^\alpha = 0$ si trova che il limite vale $-\infty$.

Esercizio 9. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n+1}$.

Soluzione: Scrivendo $n/(n-1) = 1 + 1/(n-1)$ usando il limite notevole: $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall x_n \to +\infty: \lim_{n\to+\infty} (1+\alpha/x_n)^{x_n} = e^\alpha$ e proprietà algebriche del limite si trova che il limite vale e.

Esercizio 10. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2+n}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$.

Soluzione: La succesione data ha la forma

$$\left[\left(1+\frac{\alpha}{x_n}\right)^{x_n}\right]^{n^2/x_n}$$

con le scelte $\alpha = -1$ e $x_n = n^2 + n + 1$. Essendo $x_n \to +\infty$ si applica il limite notevole del Esercizio 9 più il fatto: $b_n \to L > 0 (L < +\infty)$ e $c_n \to M$ M finito implicano $b_n^{c_n} \to L^M$. Qui $b_n = (1 - 1/x_n)^{x_n} \to e^{-1}$ e $c_n = n^2/x_n \to 1$. Quindi il limite vale e^{-1}.