Esercizi di Istituzioni di Matematica – N. 7

Studenti del C.S. in Informatica - Dott. Kevin R. Payne

Esercizio 1. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^{3n}}{\pi^{5n}-(2n^2+n^3)^n}$.

Soluzione: La successione data a_n ha una forma di indecisione $\frac{\infty}{\infty-\infty}$ dove ci si aspetta che la parte dominante sia n^{3n}. Quindi si scrive

$$a_n = \frac{n^{3n}\left(1+2/n\right)^{3n}}{n^{3n}\left(\pi^{5n}/n^{3n}-(1+2/n)^n\right)}$$

Usando le proprietà algebriche del limite e i limiti notevoli: **a)** $\forall \alpha \in \mathbf{R} : \lim_{n\to+\infty}(1+\alpha/n)^n = e^\alpha$ e **b)** $\forall A \in \mathbf{R} : \lim_{n\to+\infty}(A/n)^n = 0$ si trova che il limite vale $-e^4$.

Esercizio 2. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(1/n)}{\sin(5/n)}$.

Soluzione: Usando le proprietà algebriche del limite e il limite notevole: $\epsilon_n \to 0 \Rightarrow \sin(\epsilon_n)/\epsilon_n \to 1$ si trova che il limite vale $1/5$. Infatti la successione data è

$$\frac{1}{5}\left[\frac{\sin(1/n)}{1/n}\right]\left[\frac{5/n}{\sin(5/n)}\right]$$

dove gli ultimi due fattori tendono ad 1.

Esercizio 3. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} n^2 \mathrm{tg}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Soluzione: Usando le proprietà algebriche del limite ed i limiti notevoli: $\epsilon_n \to 0 \Rightarrow \sin(\epsilon_n)/\epsilon_n \to 1, \cos(\epsilon_n) \to 1$ si trova che il limite vale 0. Infatti la successione data ha la forma

$$\frac{1}{n}\left[\frac{\sin(1/n^3)}{1/n^3}\right]\left[\frac{1}{\cos(1/n^3)}\right]$$

dove il primo fattore tende a 0 e gli ultimi due tendono ad 1.

Esercizio 4. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(3/n)}{\sin(3/n^2)}$.

Soluzione: Usando le proprietà algebriche del limite ed i limiti notevoli: $\epsilon_n \to 0 \Rightarrow \sin(\epsilon_n)/\epsilon_n \to 1, \left(1-\cos(\epsilon_n)\right)/\epsilon_n^2 \to 1/2$ si trova che il limite vale $3/2$. Infatti la successione data è

$$3\left[\frac{1-\cos(3/n)}{(3/n)^2}\right]\left[\frac{3/n^2}{\sin(3/n^2)}\right]$$

dove il secondo fattore tende a $1/2$ e il terzo ad 1.

Esercizio 5. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+4/n^2}-1\right)$

Soluzione: La successione data ha una forma di indecisione $(+\infty)(0)$ dove ricordiamo che $0 \le a_n \to a \Rightarrow \sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$. Ci si aspetta quindi di aver bisogno di "cancellazione" nella differenza del secondo fattore. Sfruttiamo il limite notevole: se $\epsilon_n \to 0$ allora per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\epsilon_n)^\alpha - 1}{\epsilon_n} = \alpha,$$

ovvero

$$(1+\epsilon_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\epsilon_n$$

dove abbiamo usato l'idea del asintotico; cioè si definisce

$$a_n \sim b_n \quad \text{per} \quad n \to +\infty \Leftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 1.$$

Usando questa formula asintotica con $\alpha = 1/2$ e $\epsilon_n = 4/n^2$ si trova

$$n\left(\sqrt{1+4/n^2}-1\right) \sim n\left(\frac{1}{2}\frac{4}{n^2}\right) = \frac{2}{n}$$

da cui segue che il limite vale 0. Notiamo anche che $a_n \sim b_n \to c_n a_n \sim b_n c_n$ se $b_n, c_n \neq 0$.

Esercizio 6. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n^9+2n^6} - \sqrt[5]{n^{15}-3n^{12}}\right)$

Soluzione: La successione data a_n è una differenza di due successioni che si comportono come n^3 quindi è opportuno riscrivere

$$a_n = n^3\left[\left(1+2/n^3\right)^{1/3} - \left(1-3/n^3\right)^{1/5}\right].$$

Abbiamo una variante della formula asintotica di Esercizio 5 : se $\epsilon_n \to 0$ allora per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha

$$(1+\epsilon_n)^\alpha \sim 1+\alpha\epsilon_n.$$

Usando questa variante due volte con $\alpha = 1/3, \epsilon_n = 2/n^3$ e $\alpha = 1/5, \epsilon_n = -3/n$ si trova

$$a_n \sim n^3\left(1+\frac{1}{3}\frac{2}{n^3} - 1 + \frac{1}{5}\frac{3}{n^3}\right) = \frac{2}{3}+\frac{3}{5}$$

da cui segue che il limite vale 19/15.

Esercizio 7. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ dove $a_n = \frac{(2n)^{3n}}{(3n)!}$.

Soluzione: Dopo aver semplificato l'espressione del rapporto a_{n+1}/a_n si usa il limite notevole $(1+1/n)^n \to e^1$ per trovare il limite $8e^3/27$.

Esercizio 8. Sia $\{a_n\}$ la successione definita per ricorrenza così:

$$a_{n+1} = \sqrt{5a_n}, \quad a_0 = 10$$

Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$.

Soluzione: Usando la regola di ricorerenza si trova che l'unici candidati per il limite sono $l = 0, 5$. Si cerca di mostrare l'esistenza del limite mostrando la monotonia e limittateza della successione a_n. La successione è positivo per ogni n. Calcolando il rapporto a_{n+1}/a_n si trova:

$$a_{n+1}/a_n > 1 \Leftrightarrow a_n < 5, \quad a_{n+1}/a_n < 1 \Leftrightarrow a_n > 5$$

Essendo $a_0 = 10 > 5$ si cerca di mostrare $a_n > 5$ per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$. Questo si fa per induzione; cioè se $a_n > 5$ allora

$$a_{n+1} = \sqrt{5}\sqrt{a_n} > \sqrt{5}\sqrt{5} = 5$$

e quindi si conclude che a_n è limitata inferiormente da 5 ed è strettamtente decrescente da cui segue che il limite di a_n esiste (ed è l'estremo inferiore dell'insieme $\{a_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$). Per il primo passo il limite deve essere 0 oppure 5 ma 0 è impossibile. Quindi il limite esiste e vale 5.

Esercizio 9. Sia $\{a_n\}$ la successione definita per ricorrenza così:

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{1 + a_n}, \quad a_0 = 1/10$$

Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$.

Soluzione: Usando la regola di ricorerenza si trova che l'unici candidati per il limite sono $l = 0, 1$. Si cerca di mostrare l'esistenza del limite mostrando la monotonia e limittateza della successione a_n. La successione è positivo per ogni n. Calcolando il rapporto a_{n+1}/a_n si trova:

$$a_{n+1}/a_n > 1 \Leftrightarrow a_n < 1, \quad a_{n+1}/a_n < 1 \Leftrightarrow a_n > 1$$

Essendo $a_0 = 1/10 < 1$ si cerca di mostrare $a_n < 1$ per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$. Questo si fa per induzione e quindi si conclude che a_n è limitata superiormente da 1 ed è strettamtente crescente da cui segue che il limite di a_n esiste (ed è l'estremo superiore dell'insieme $\{a_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$). Per il primo passo il limite deve essere 0 oppure 1 ma 0 è impossibile. Quindi il limite esiste e vale 1.

Esercizio 10. Sia $\{a_n\}$ la successione definita per ricorrenza così:

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{2} + a_n^2}{1 + a_n}, \quad a_0 = 3/2$$

Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$.

Soluzione: Usando la regola di ricorerenza si trova che l'unico candidato per il limite è $l = \sqrt{2}$. Si cerca di mostrare l'esistenza del limite mostrando la monotonia e limittateza della successione a_n. La successione è positivo per ogni n. Calcolando il rapporto a_{n+1}/a_n si trova:

$$a_{n+1}/a_n > 1 \Leftrightarrow a_n < \sqrt{2}, \quad a_{n+1}/a_n < 1 \Leftrightarrow a_n > \sqrt{2}$$

Essendo $a_0 = 3/2 > \sqrt{2}$ si cerca di mostrare $a_n > \sqrt{2}$ per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$. Questo si fa per induzione e quindi si conclude che a_n è limitata inferiormente da $\sqrt{2}$ ed è strettamtente decrescente da cui segue che il limite di a_n esiste (ed è l'estremo inferiore dell'insieme $\{a_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$). Per il primo passo il limite deve essere $\sqrt{2}$.