EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Appunti del Corso

Anno Accademico 2010-2011

Kevin R. Payne[1]
Università di Milano

[1]Appunti del docente redatti con l'aiuto di Tommaso Passalaqua, studente del corso nell'a.a. 2009-2010

Indice

1 Introduzione alle PDE **1**

1.1 Nozioni di base 2

1.2 Esempi 3

1.3 Problemi e sfide 5

2 Formule di rappresentazione per PDE **8**

2.1 L'equazione del trasporto ed il metodo delle caratteristiche 8

2.2 L'equazione di Laplace 12

2.2.1 Prime soluzioni e la soluzione fondamentale 12

2.2.2 La formula di rappresentazione di Green 17

2.2.3 La formula intergrale di Poisson 21

2.2.4 Proprietà del valor medio 25

2.2.5 Principi di massimo 27

2.3 L'equazione del calore 29

2.3.1 La soluzione fondamentale 30

2.3.2 Formule di soluzione per il problem di Cauchy 32

2.3.3 Bolle di calore e proprietà del valor medio per soluzioni regolari . 36

2.3.4 Principio di massimo/minimo per soluzioni regolari 37

2.4 L'equazione delle onde 40

2.4.1 Il caso $n = 1$: la formula di D'Alembert 41

2.4.2 I casi $n = 2, 3$: le formule di Poisson, Kirchoff 43

2.4.3 Metodi di energia 46

2.5 Commenti finali 49

3 Spazi di Sobolev **55**

3.1 Derivate deboli 55

3.2 Gli spazi $W^{k,p}(\Omega)$ 59

3.3 Approssimazione in $W^{k,p}$ tramite funzioni regolari 64

3.3.1 Approssimazione locale 64

3.3.2 Approssimazione globale 66
3.3.3 Approssimazione fino al bordo 69
3.3.4 Applicazioni dell'approssimazione globale 71
3.4 Traccia in $W^{1,p}(\Omega)$ 74
3.4.1 Il teorema della traccia 75
3.4.2 Gli spazi $W_0^{k,p}(\Omega)$ 79
3.5 Soluzione debole del problema di Dirichlet 84
3.6 Disuguaglianze di Sobolev 87
3.6.1 Disuguaglianze per $W^{1,p}$ nel caso $1 \leq p < n$. 88
3.6.2 Disuguaglianze per $W^{1,p}$ nel caso $n < p \leq \infty$. 94
3.6.3 Altre disuguaglianze. 100
3.7 Compattezza delle immersioni 101
3.7.1 Compattezza e l'immersione di Morrey 103
3.7.2 Compattezza e l'immersione di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev . . . 104

4 Equazioni ellittiche del secondo ordine **108**
4.1 Introduzione 108
4.2 Esistenza di soluzioni deboli 110
4.2.1 Esistenza tramite il lemma di Lax-Milgram 111
4.2.2 Esistenza tramite la teoria di Fredholm 116
4.2.3 Esistenza e lo spettro reale di L 121
4.3 Regolarità delle soluzioni deboli 124
4.4 Principi di minimo e di massimo 130
4.4.1 Principio di massimo per soluzioni classiche 131
4.4.2 Principio di massimo per soluzioni deboli 137
4.5 Autovalori e autofunzioni 141

Capitolo 1

Introduzione alle PDE

Iniziamo facendo notare che il campo delle PDE (Partial Differential Equations)[1] è un soggetto vivo, enorme ed importante. Il campo forma il linguaggio delle scienze nel senso che i modelli e le regole delle scienze sono quasi sempre delle PDE. Inoltre, il campo delle PDE sta all'incrocio tra geometria, fisica matematica, probabilità ed analisi numerica.
E' anche un soggetto fine e sorprendente nel senso che piccoli (apparatamente innocui) cambiamenti nella regola della PDE possono cambiare tutto sul comportamento delle sue soluzioni; ad esempio la differenza fra

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ e } u_{xx} - u_{yy} = 0$$

è enorme. Vedremo dopo il perchè. Uno degli obiettivi principali di questo capitolo introduttivo e di quello successivo sarà quello di cominciare di "sentire" cosa vuol dire la regola della PDE. Inoltre, vogliamo sottolineare fin da subito l'importanza del senso in cui intendiamo che una funzione data sia soluzione della PDE.
In questo primo capitolo vogliamo fornire:

- nozioni di base;
- esempi;
- problemi e sfide.

[1] Usiamo la stessa abbreviazione PDE per le forma singolare "Partial Differential Equation"

1.1 Nozioni di base

Una PDE è un'equazione per una funzione u di due o più variabili in cui è coinvolta almeno una sua derivata parziale. Prima di precisare meglio, fissiamo qualche notazione che sarà usata nel seguito. Rispetto alle coordinate $x = (x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$ denotiamo

$$Du = \{D_1 u, \dots, D_n u\} \text{ dove } D_j u(x) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = u_{x_j}(x) \tag{1.1.1}$$

$$D^2 u = \left\{D_{ij} u;\ i, j = 1, \dots, n\right\} \text{ dove } D_{ij} u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) = u_{x_i x_j}(x), \tag{1.1.2}$$

e così via per $D^k u$ con $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 3$. Spesso, pensiamo al *gradiente* Du come un vettore in $\mathbb{R}^n$ e all'*hessiana* $D^2 u$ come una matrice in R^{n^2}. Usiamo anche la notazione di *multi-indici* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ [2]. La *lunghezza* di α è $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ e denotiamo

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_n}^{\alpha_n}} = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} u \tag{1.1.3}$$

se $u \in C^{|\alpha|}$ per avere l'uguaglianza di tutte le derivate miste.

Definizione 1.1.1. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Si chiama *PDE di ordine k in U* un'equazione della forma

$$F(x, u(x), Du(x), \dots D^k u(x)) = 0 \text{ per } x \in U \tag{1.1.4}$$

dove

$$u : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

è una funzione *incognita* e

$$F : U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$$

è una funzione data t.c. $F(x, u, p_1, \dots, p_k)$ dipende da p_k.

Definizione 1.1.2. Una *soluzione classica di (1.1.4) in U* è una funzione $u \in C^k(U)$ t.c. (1.1.4) sia soddisfatta punto per punto in U.

Esempio 1.1.1. $u_{x_n} = 0$ in $\mathbb{R}^n$
Tutte le soluzioni classiche sono

$$u(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{n-1}) \tag{1.1.5}$$

con $g \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$, ma per **ogni** $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ (non necessariamente C^1) la funzione u definita da (1.1.5) ammette derivata parziale $u_{x_n}(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Quindi la Definizione 1.1.2 è una scelta forse opinabile.

[2] $\mathbb{N}$ sono gli interi $n \geq 0$ e $\mathbb{N}_0$ quelli più lo zero

Osservazione 1.1.1. Ci sono PDE importanti per cui Definizione 1.1.2 è troppo restrittiva. Il concetto di *soluzione debole (in senso generalizzato)* é essenziale per lo studio moderno delle PDE.

Un primo modo di raggruppare le PDE è quello basato sul grado di *linearità* presente nell'equazione.

Definizione 1.1.3. Siano a_α e f funzioni date. Una PDE (1.1.4) si chiama

(L) *lineare* se è della forma

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) D_x^\alpha u + f(x) = 0; \tag{1.1.6}$$

cioè $F(x, u, p_1, \ldots, p_k)$ è lineare in $(u, p_1, \ldots, p_k)$. Inoltre è *omogenea* se $f \equiv 0$.

(SL) *semilineare* se è della forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D_x^\alpha u + f(x, u, \ldots, D^{k-1}u) = 0 \tag{1.1.7}$$

(QL) *quasilineare* se è della forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, u, \ldots, D^{k-1}u) D_x^\alpha u + f(x, u, \ldots, D^{k-1}u) = 0 \tag{1.1.8}$$

(CNL) *completamente nonlineare* se $F(x, u, p_1, \ldots, p_k)$ non è lineare nelle variabili $p_k \in \mathbb{R}^{n^k}$.

Non è difficile immaginare che la trattazione dei primi tre tipi sia collegata. Con una buona teoria lineare, si può vedere la classe (SL) come una perturbazione dalla linearità di ordine inferiore. Per la classe (QL), la linearizzazione di F in $u = \bar{u}$, con $\bar{u}$ una soluzione approssimata dell'equazione, fornisce un'equazione lineare. Con stime opportune si potrebbe poi sperare di mettere il problema nel contesto della ricerca di punti fissi in uno spazio funzionale opportuno.

1.2 Esempi

Esempio 1.2.1. (Lineari)

(Trasporto) $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j(x,t) \frac{\partial u}{\partial_{x_j}} = 0$ dove $u = u(x,t)$

(Laplace) $\Delta u = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0$ dove $u = u(x)$. L'equazione $\Delta u = f(x)$ è detta *equazione di Poisson*.

(del calore) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ dove $u = u(x,t)$

(delle onde) $\Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ dove $u = u(x,t)$

sono equazioni lineari che tratteremo nel Capitolo 2. Ce ne sono molte altre di una certa importanza, v. Cap 1 di [E]. L'equazione del trasporto è del primo ordine, mentre le altre sono del secondo ordine. Le soluzioni stazionarie (independenti di t) dell'equazione del calore o delle onde sono soluzioni dell'equazione di Laplace. Le equazioni con derivate in t sono esempi di *equazioni di evoluzione*.

Esempio 1.2.2. (Nonlineari)

(Burgers) $u_t + uu_x = 0$ dove $u = u(x,t)$ è (QL) del primo ordine. É importante nella meccanica dei fluidi ed è un esempio di una *legge di conservazione* del primo ordine, cioè di un'equazione della forma $u_t + (f(u))_x = 0$ per qualche f.

(Hamilton-Jacobi) $u_t + H(x, Du) = 0$ dove $u = u(x)$ è (CNL) del primo ordine. È importante per la meccanica.

(Poisson NL) $\Delta u + f(u) = 0$ dove $u = u(x)$ è (SL). È importante in questioni di geometria riemanniana ed è molto studiata tramite metodi variazionali (*calcolo delle variazioni*).

(superfici minime) $\operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{(1+|Du|^2)^{1/2}}\right) = 0$ è (QL) del secondo ordine. Descrive funzioni t.c. il grafico di u ha curvatura media nulla.

(Monge-Ampère) $\det(D^2u) - f(x,u,Du) = 0$ è (CNL) del secondo ordine. Con f opportuna, descrive funzioni con grafici di curvatura prescitta.

Per altre equazioni ed esempi di sistemi lineari e non, v. Cap 1 di [E].

Osservazione 1.2.1. C'è una specie di "monotonia della difficoltà" nello studio delle PDE nel senso che i problemi diventano più difficili all'aumentare:

1. delle variabili dipendenti, cioè per sistemi;
2. delle variabili indipendenti (ODE, "2DE", PDE), cioè 1,2, o più variabili;
3. dell'ordine;
4. del grado di nonlinearità.

Ci sono ovviamente importanti eccezioni.

1.3 Problemi e sfide

Osservazione 1.3.1. Dobbiamo prestare attenzione alla scelta delle PDE da studiare; ad esempio, l'equazione $e^{u_{x_1}} = 0$ **non** ha soluzioni. Rappresenta una teoria vuota. È difficile immaginare come mettere una condizione su F in (1.1.4) che escluda a priori questa situazione. Quindi, prestiamo attenzione (almeno all'inizio) ad equazioni e sistemi che arrivano dalle applicazioni (scienze, geometria, etc.).

Esempio 1.3.1. (delle onde - D'Alembert 1749)
Sia $u = u(x,t) : [0,L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soluzione dell'equazione

$$\Box u = u_{tt} - u_{xx} = 0. \tag{1.3.1}$$

Se le vibrazioni sono piccole, la quantità $u(x,t)$ modellizza bene lo spostamento dalla posizione di equilibrio ($u = 0$) di una corda elastica omogenea sotto tensione alla posizione x e al tempo t. Cosa ci dice l'equazione (1.3.1)? Se, per esempio, $u(x,0)$ è negativa e convessa ($u_{xx}(x,0) > 0 > u(x,0)$ per ogni $x \in (0,L)$) allora $u_{tt}(x,0) > 0$; cioè l'accelerazione iniziale è positiva in modo da spingere la corda a tornare alla posizione di equilibrio.

Osservazione 1.3.2. Attenzione alla struttura della PDE. Nel caso di un semplice cambiamento di segno, l'equazione di Laplace $u_{tt} + u_{xx} = 0$ ha un comportamento completamente diverso da (1.3.1). Con le condizione iniziali precedenti, l'accelerazione diventa $u_{tt}(x,0) < 0$ in questo caso. Un obiettivo del soggetto è quello di iniziare a "vedere" che cosa impone la PDE (1.1.4) al comportamento di u.

Osservazione 1.3.3. Le prime domande da porsi nello studio di una PDE sono:

1. Esiste almeno una soluzione?
2. La soluzione è unica in qualche senso?
3. Le soluzioni dipendono in modo continuo dai dati?

Un problema per cui le risposte ad 1,2,3 siano affermative si dice *ben posto (secondo Hadamard)*. Per l'unicità abbiamo bisogno di *condizioni supplementari* come condizioni iniziali o condizioni al contorno. Ad esempio, per l'Esempio 1.3.1

(E) $\Box u = 0$ in $(0,L) \times \mathbb{R}$

(BC) $u(L,t) = 0 = u(0,t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

$(\mathrm{IC})_1$ $u(x,0) = g(x)$ per $x \in [0,L]$

$(\mathrm{IC})_2$ $u_t(x,0) = h(x)$ per $x \in [0,L]$

dove la posizione iniziale g e la velocità iniziale h siano assegnate. Considerazioni semplici indicano che perdiamo di sicuro l'unicità se cerchiamo di togliere una delle condizioni (BC), $(IC)_1$, $(IC)_2$. Per la dipendenza continua, si tratta della dipendenza da g, h.

Osservazione 1.3.4. Esistenza ed unicità sono in opposizione rispetto all'universo $\mathcal{F}$ di possibili soluzioni, nel senso che più è grande lo spazio $\mathcal{F}$, più facile sarà l'esistenza ma più difficile sarà l'unicità e viceversa.

Osservazione 1.3.5. A volte possiamo risolvere (E) + (BC) + ... mediante formule esplicite (o quasi), ma tipicamente no. Quindi spesso si considerano

- metodi di approssimazione (analisi numerica)
- metodi non espliciti (analisi reale, funzionale, calcolo delle variazioni)

Nella prima parte del corso, partiremo da problemi "esplicitabili" per poi passare ai metodi "esistenziali".

Osservazione 1.3.6. Nella fase "esistenziale", la questione della *regolarità* delle soluzioni gioca un ruolo fondamentale. In particolare, come abbiamo già suggerito:

1. Non è detto che le soluzioni siano C^k come richiede Def. 1.1.2. Ad esempio, ci sono *onde di shock* nelle soluzioni della legge di conservazione $u_t + (F(u))_x = 0$ per cui serve una definizione opportuna di *soluzione debole*.
2. Richiedendo meno regolarità si rende lo spazio più grande e quindi si facilità l'esistenza, come notato nell'Oss. 1.3.4.
3. Abbassare la richiesta di regolarità non è solo una questione esistenziale; ma anche tecnicamente utile. Il rilassamento rispetto alla regolarità vuol dire che non è necessario faticare per assicurare che la soluzione rimanga buona (in C^k) lungo tutto il percorso di una dimostrazione di esistenza.

Quindi, possiamo dire che il lavoro si divide spesso in tre passi:

A. Esistenza;

B. Unicità;

C. Regolarità,

Non è detto però che il lavoro si faccia in tale ordine. Spesso si riesce a mostrare che le soluzioni regolari sono uniche e che le soluzioni deboli (se esistono) sono regolare mediante delle stime di regolarità. Queste stime saranno poi utile (insieme ad un po' di analisi funzionale) per mostrare l'esistenza.

Osservazione 1.3.7. Ci interessano soprattutto *tecniche* per arrivare ad A,B,C. Spesso tali tecniche sono *a priori*; cioè assumendo di avere una soluzione (in qualche senso), cosa possiamo dire di u? Tecniche molto comuni per diversi tipi di equazioni lineari e non sono:

- principi di massimo;
- stime integrali (di "energia").

Capitolo 2

Formule di rappresentazione per PDE

Il punto di questo capitolo è esaminare 4 esempi fondamentali di PDE che sono lineari a coefficienti costanti del primo e del secondo ordine. Gli obiettivi principali sono:

1. Introdurre modelli per lo studio futuro;
2. Introdurre delle tecniche di rappresentazioni di soluzioni;
3. Scoprire alcune proprietà qualitative delle soluzioni.

2.1 L'equazione del trasporto ed il metodo delle caratteristiche

Metodo: Integrare una PDE del primo ordine lungo delle curve opportune.

Esempio 2.1.1. (L'eq. del trasporto)[1]

$$u_t + b \cdot Du = 0 \text{ in } \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \tag{2.1.1}$$

dove $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

- L'equazione (2.1.1) ci dice che $D_V u = 0$, dove $V = (b, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$; ovvero la *derivata direzionale* di u nella direzione V è nulla. Quindi abbiamo u costante lungo le curve tangenti al campo vettoriale V.
- Queste *curve integrali* sono della forma $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ dove

$$\dot{\gamma}(s) = (b, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(s) = b \\ \dot{t}(s) = 1 \end{cases} \quad \left(\cdot = \frac{d}{ds} \right)$$

[1] Indichiamo il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ come $x \cdot y$ oppure $\langle x, y \rangle$

- Quindi abbiamo delle rette passanti per (x_0, t_0) in $s = 0$ con parametrizzazione

$$x = sb + x_0 \quad \text{e} \quad t = s + t_0$$

- La quantità $x - tb = x_0 - t_0 b$ è costante in s e, quindi, tutte le soluzioni classiche sono

$$u = g(x - tb) \quad \text{con} \quad g \in C^1(\mathbb{R}^n) \tag{2.1.2}$$

Esercizio 2.1.1. Verificare che u definita da (2.1.2) è soluzione classica di (2.1.1)

Domanda 1: Come trovare una soluzione unica?
Risposta: Andando a specificare u lungo una qualsiasi ipersuperficie Σ *trasversale al campo* $V = (b, 1)$. Cioè scegliendo Σ per cui V non sia mai tangente a Σ

Esempio 2.1.2. (Problema di Cauchy) Sia $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $u(x, t) = g(x - tb)$ è l'unica soluzione classica del problema [2]

$$\begin{cases} \text{(E)} \quad u_t + b \cdot Du = 0 & \text{in } R^n \times \mathbb{R} \\ \text{(IC)} \quad u = g & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} = \Sigma \end{cases}$$

- È chiaro che u risolve (E) + (IC).
- È l'unica soluzione classica? Date due soluzioni classiche $u_1, u_2 \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ poniamo $u = u_1 - u_2$. Per la linearità si ha $u_t + b \cdot Du = 0$ e $u(x, 0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Quindi u è costante (zero) lungo ogni curva $\gamma(s)$ nella direzione $(b, 1)$ trasversale all'ipersuperficie $\{t = 0\}$.

Osservazione 2.1.1. Qui g potrebbe essere presa come una qualsiasi funzione (non necessariamente C^1) e la funzione $u = g(x - tb)$ ammette derivata direzionale nulla, ma u non è una soluzione classica secondo la Definizione 1.1.2.

Domanda 2: Cosa fare per il problema con (E) non omogenea? Cioè

$$\begin{cases} \text{(E)} \quad u_t + b \cdot Du = f & \text{in } R^n \times \mathbb{R} \\ \text{(IC)} \quad u = g & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} = \Sigma \end{cases}$$

dove $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$.
Risposta: Si cerca di risolvere la ODE lungo ogni curva integrale usando il TFCI.[3]

- Consideriamo $z(s) = u(\gamma(s)) = u(x_0 + sb, s)$ per $s \in \mathbb{R}$; cioè $u_{|\Gamma_0}$ dove Γ_0 è la curva integrale di V passante per $(x_0, 0)$ quando $s = 0$.

[2] Usiamo la scrittura $\{t = 0\}$ per indicare $\{t \in \mathbb{R} : t = 0\}$
[3] Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

- Abbiamo
$$\begin{cases} \dot{z}(s) = (u_t + b \cdot Du)(\gamma_0(s)) = f(\gamma_0(s)) \\ z(0) = u(x_0, 0) \end{cases}$$

- Quindi per il TFCI
$$z(s) = u(x_0, 0) + \int_0^s f(\gamma_0(\tau))\, d\tau = u(x_0, 0) + \int_0^s f(x_0 + \tau b, \tau)\, d\tau,$$
ma $x(s) = x_0 + sb$ e $t(s) = s$. Quindi
$$u(x, t) = u(x - tb, 0) + \int_0^t f(x + (\tau - t)b, \tau)\, d\tau$$

Domanda 3: Cosa fare con un'equazione lineare a coefficienti variabili?

$$c(x, t)u_t + b(x, t) \cdot Du = 0 \tag{2.1.3}$$

Risposta: Dobbiamo imporre condizioni su $V = (b, c)$ per cui esistano almeno localmente le curve integrali. Dopodiché la soluzione sarà costante lungo tali curve.

- Definendo $V = (b(x, t), c(x, t))$, l'equazione (2.1.3) è di nuovo della forma $D_V u = 0$.

- Il sistema per le *curve integrali* risulta essere
$$\begin{cases} \dot{\gamma}(s) = V(\gamma(s)) \\ \gamma(0) = (x_0, t_0) \end{cases}$$
Le soluzioni definiscono il *flusso di V*

- Se V fosse almeno *localmente lipschitziana* (globalemte lipschitziana sarebbe ancora meglio) avremmo esistenza ed unicità locale delle soluzioni $\gamma(s)$.

- La funzione $z(s) = u(\gamma(s))$ soddisfa $\dot{z}(s) = 0$ e lungo le curve integrali di V la soluzione u risulta costante.

- Per l'unicità della soluzione u basta andare a specificare u lungo una superficie Σ trasversale al flusso di V.

Osservazione 2.1.2. Per le equazioni lineari del primo ordine, il *metodo delle caratteristiche* permette di ricondurre la costruzione di soluzioni alla risoluzione di ODE. Più precisamente dobbiamo:

1. Risolvere il sistema di ODE per le curve integrali $\gamma = \gamma(s)$ di V, ovvero per le *caratteristiche* dell'operatore differenziale $L = V \cdot D = D_V = c\partial_t + b \cdot D$.

2. Integrare l'ODE $\dot{z} = f(\gamma(s))$ lungo le curve collegando $x \in U$ ad $x \in \partial U$ mediante γ con sostegno in U.

Osservazione 2.1.3. Il metodo si estende a tutte le equazioni del primo ordine

$$\begin{aligned} &(\mathrm{E})_1 \qquad F(x,u,Du) = 0 \quad \text{in } U \subset \mathbb{R}^n \\ &(\mathrm{BC}) \qquad u_{|\gamma} = g \qquad\quad \text{su } \Gamma \subset \partial U \end{aligned}$$

dove $F = F(x,z,p) : U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \Gamma \to \mathbb{R}$. In particolare il *sistema caratteristico* per $(\mathrm{E})_1$ è il sistema di $2n+1$ ODE per $\Phi = \Phi(s) = (x(s), z(s), p(s))$ definito da [4]

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = D_p F(\Phi(s)) \\ \dot{p}(s) = -D_x F(\Phi(s)) - D_z F(\Phi(s)) p(s) \\ \dot{z}(s) = D_p(\Phi(s)) \cdot p(s) \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Esempio 2.1.3. (Caso Lineare) $F(x,z,p) = V(x)\cdot p - f(x)$ con V campo vettoriale e f termine noto. Il sistema (2.1.4) diventa

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = V(x(s)) \\ \dot{p}(s) = -D_x V(x(s)) \cdot p(s) - D_x f(x(s)) \\ \dot{z}(s) = V(x(s)) \cdot p(s) = f(x(s)) \end{cases} \tag{2.1.5}$$

dove abbiamo usato la PDE $F = 0$ per semplificare la terza equazione. La seconda equazione è superflua, nel senso che basta integrare la prima per determinare le curve integrali γ in forma parametrica e poi si va ad integrare la terza per trovare $u_{|\gamma}$, come prima.

Osservazione 2.1.4. Quando $f \equiv 0$ abbiamo $F(x,z,p) = F(x,p) = V(x)\cdot p$ e il sistema (2.1.4) diventa

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = V(x(s)) = D_p F(x(s), p(s)) \\ \dot{p}(s) = -D_x V(x(s)) \cdot p(s) = -D_x F(x(s), p(s)) \\ \dot{z}(s) = 0 \end{cases} \tag{2.1.6}$$

ovvero un *sistema hamiltoniano* per F (le prime due equazioni) più $z(s) = u(\gamma(s))$ costante lungo il flusso hamiltoniano che fornisce le caratteristiche. Questo è il punto chiave che permette di generalizzare il concetto di caratteristiche per operatori differenziali di ordine superiore.

Nel testo di Evans [5], il *metodo delle caratteristiche* viene sviluppato in modo organico. In particolare:

- Metodo delle caratteristiche per $(\mathrm{E})_1$ in § 3.2;

[4] D_x è il gradiente nelle varibili $x \in \mathbb{R}^n$, etc.

- L'equazione di Hamilton-Jacobi $u_t + H(x, Du) = 0$ in § 3.3;
- Leggi di conservazione $u_t + (F(u))_x = 0$ in § 3.4.

Esercizi: dal testo [E]

- Guardare Appendice A (notazione), C (calculus facts)
- Cap. 1 - ♯ 1,2,3,4
- Cap. 2 - ♯ 1 in § 2.5

2.2 L'equazione di Laplace

Obiettivo: Sviluppare formule di rappresentazione per le soluzioni u di

$$\text{(Laplace)} \quad \Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad \text{in } U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto}$$

$$\text{(Poisson)} \quad \Delta u = f \quad \text{in } U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ con } f = f(x)$$

più eventuali condizioni al bordo ∂U di U. Più precisamente, vedremo delle *formule esplicite ed implicite* e le loro conseguenze.

Osservazione 2.2.1. L'operatore Δ è detto *Laplaciano* e soddisfa [5]

$$\Delta u = \operatorname{tr}(D^2 u) = \operatorname{div}(Du), \tag{2.2.1}$$

ovvero esso è la traccia della matrice hessiana di u e la divergenza del gradiente di u. Queste due rappresentazioni sono di importanza fondamentale per interpretare l'azione di Δ su u.

2.2.1 Prime soluzioni e la soluzione fondamentale

Definizione 2.2.1. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Una funzione $u \in C^2(U)$ è detta *armonica in* U se $\Delta u(x) = 0$ per ogni $x \in U$.

Esempi di funzioni armoniche su tutto $\mathbb{R}^n$ sono le funzioni $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definite da

1. (Costanti) $u(x) = c$ dove $c \in \mathbb{R}$
2. (Affini) $u(x) = \langle b, x \rangle + c$ dove $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$
3. (Forme quadratiche) $u(x) = \langle Ax, x \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ **se** $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$

[5] $\operatorname{tr}(A)$ è la traccia della matrice A

Osservazione 2.2.2. Altre soluzioni elementari possono essere trovate mediante il *metodo di riduzione per simmetrie*, sfruttando delle *invarianze* per Δ. In particolare, sia $u \in C^2(U)$ armonica in U. Allora

i) $\forall\, p \in \mathbb{R}^n$ fisso, $u_p(x) := u(x-p)$ è armonica in $U + \{p\}$

ii) $\forall\, \lambda > 0$ fisso, $u_\lambda(x) := u(\lambda x)$ è armonica in $\lambda^{-1}U$

ii) $\forall\, T \in O(n)$ fisso, $u_T(x) := u(Tx)$ è armonica in $T^{-1}U$ dove $T \in O(n)$ se $TT^t = T^tT = I$[6]

Esercizio 2.2.1. Verificare queste affermazioni usando la regola della catena.

Quindi ha senso cercare delle soluzioni invarianti rispetto alle [7]

a) traslazioni in $e_n \Rightarrow u(x) = u(x_1, \dots, x_{n-1})$ (Riduzione di dimensione)

b) rotazioni $\Rightarrow u(x) = v(|x|)$ con $v : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ (Soluzioni radiali)

Domanda: Quali sono le soluzioni radiali? Poniamo $u = v(|x|)$ con $r := |x|$ e calcoliamo usando $r_{x_j} = \frac{x_j}{|x|}$ per trovare

$$u_{x_j} = v'(r)\frac{x_j}{|x|}$$

$$u_{x_jx_j} = v''(r)\frac{x_j^2}{|x|^2} + v'(r)\left[\frac{1}{|x|} - \frac{x_j^2}{|x|^3}\right].$$

Quindi

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r)$$

Ponendo $w = v'(r)$, dobbiamo determinare le soluzioni di

$$w'(r) + \frac{n-1}{r}w(r) = 0$$

una ODE a variabili separabili con soluzioni

$$\log|w| = (1-n)\log r + C \Rightarrow w(r) = e^C r^{1-n}, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

Integrando in r si trova

$$v(r) = \begin{cases} C_1 r^{2-n} + C_2 & n \geq 3 \\ C_1 \log r + C_2 & n = 2 \end{cases}$$

con C_1, C_2 costanti arbitrari. Sostituendo infine $r = |x|$ otteniamo

$$u(x) = \begin{cases} C_1|x|^{2-n} + C_2 & n \geq 3 \\ C_1 \log(|x|) + C_2 & n = 2 \end{cases} \tag{2.2.2}$$

[6] Matrici ortogonali dove T^t è la trasposta di T

[7] $\{e_k\}_{k=1}^n$ è la base conaonica di $\mathbb{R}^n$ e $|x| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ è la norma euclidea

Osservazione 2.2.3. Le funzioni armoniche e radiali (2.2.2) sono costanti oppure *singolari in* 0; cioè se $C_1 \neq 0$, le soluzioni con domini massimali sono definite (lisce ed armoniche) solo su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Questo fatto è molto importante e, per fortuna, una benedizione sorprendente. È proprio la singolarità che rende tali soluzioni utili al fine di costruire altre soluzioni.

Definizione 2.2.2. La *soluzione fondamentale di* Δ *in* $\mathbb{R}^n$ è la funzione

$$\Phi(x) = \Gamma(|x|) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log(|x|) & n = 2 \\ \frac{1}{n(2-n)\omega_n}|x|^{2-n} & n \geq 3 \end{cases} \tag{2.2.3}$$

dove $\omega_n = |B_1(0)|$ è la misura (n-dimensionale) della palla unitaria e $n\omega_n$ è la misura (di Hausdorff $n-1$-dimensionale) della sfera unitaria $\partial B_1(0)$.

Osservazione 2.2.4. Nella Definizione 2.2.2

a) C'è il segno opposto in Evans [E] (lì si tratta della soluzione fondamentale di $-\Delta$).[8]

b) Abbiamo $\Delta\Phi(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$.

c) Più in generale, per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ fisso, la funzione $\Phi(x; y) = \Phi(x - y)$ soddisfa

$$\Delta_x \Phi(x; y) = 0 \quad \forall\, x \neq y.$$

d) La scelta delle costanti C_1, C_2 sarà chiarita in seguito.

Proposizione 2.2.1 (Proprietà di Φ)**.** *Abbiamo*

i) $\Phi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$;

ii) $|D\Phi(x)| \leq \dfrac{C_n}{|x|^{n-1}}, \quad x \neq 0;$

ii) $\left|D^2\Phi(x)\right| \leq \dfrac{C_n}{|x|^n}, \quad x \neq 0.$

Dimostrazione. Dobbiamo solo calcolare e stimare.

i): $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \Rightarrow \Phi_{|K} \in L^1(K)$ per ogni $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto. Se $K \subset B_R(0)$ abbiamo (nel caso $n \geq 3$)

$$\begin{aligned} \int_K \Phi\, dx &\leq \int_{B_R(0)} \Phi\, dx = \frac{1}{n(2-n)\omega_n} \int_0^R \left(\int_{\partial B_r(0)} r^{2-n} dS \right) dr \\ &= C_n \int_0^R r^{2-n} r^{n-1}\, dr = C_n \int_0^R r\, dr < +\infty \end{aligned}$$

dove dS è la misura della sfera ed è stato usato "Fubini per le bucce" (v. App.C di [E]).

[8] [E] usa anche $\alpha(n)$ al posto di ω_n

ii) Calcolando le derivate di Φ si trova

$$\Phi_{x_j} = C_n|x|^{1-n}\frac{\partial}{\partial_{x_j}}(|x|) = C_n|x|^{1-n}\frac{x_j}{|x|} = C_n\frac{x_j}{|x|^n} \tag{2.2.4}$$

$$|D\Phi|^2 = C_n^2\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{|x|^{2n}} = \frac{C_n^2}{|x|^{2(n-1)}}. \tag{2.2.5}$$

□

Esercizio 2.2.2. Controllare la dimostrazione di i) nel caso $n = 2$ e mostrare la parte iii).

Osservazione 2.2.5. Abbiamo ottenuto così che il gradiente di Φ localmente integrabile, mente la hessiana no. Infatti $|D^2\Phi| \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ essendo $|x|^p \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $p > -n$.

Adesso arriviamo al primo vero risultato, che indica come le soluzioni singolari per l'equazione di Laplace ci diano una formula di rappresentazione esplicita per le soluzioni dell'equazione di Poisson in tutto lo spazio.

Teorema 2.2.1. *Sia $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$; cioè una funzione di classe C^2 con supporto compatto.*[9] *Allora la funzione u definita da*

$$u(x) = (\Phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y)f(x-y)\,dy \tag{2.2.6}$$

soddisfa

i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

ii) $\Delta u(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

Dimostrazione. Usiamo alcune proprietà della convoluzione note dal corso di Analisi Reale (v. Payne [11]) con un argomento al limite per risolvere la singolarita di $\Phi(x-\cdot)$ in x.

1. Sappiamo dall'Analisi Reale (v. Teorema 2.7.5 di [11]) che $\Phi \in L^1_{\text{loc}}$, $f \in L^\infty_{\text{comp}} \Rightarrow \Phi * f$ è ben definita e continua su tutto $\mathbb{R}^n$. Inoltre (v. Proposizione 2.8.1 di [11]) abbiamo $f \in C^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ dove

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \Phi * \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} = \Phi * \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$$

e quindi abbiamo il punto i).

[9] Denotiamo il supporto di f con il simbolo $\text{supp}(f)$

2. Fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrario e scriviamo[10]

$$\begin{aligned} \Delta u &= \int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)\,dy + \int_{B_\varepsilon(0)^C} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)\,dy \\ &:= I_\varepsilon + J_\varepsilon \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la seconda espressione in (2.2.6) per derivare sotto il segno di integrale.

3. Si ha la stima

$$|I_\varepsilon| \le C\|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\,dy \le C\|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \begin{cases} \varepsilon^2 & n \ge 3 \\ \varepsilon^2 \log \varepsilon & n = 2 \end{cases}$$

Quindi $|I_\varepsilon| \to 0$ per $\varepsilon \to 0^+$.

4. Integrando per parti, si mostra che $J_\varepsilon \to f(x)$ per $\varepsilon \to 0^+$ (v. Theorem 1 § 2.2 di [E]).

□

Osservazione 2.2.6. Nel linguaggio delle distribuzioni, il Teorema 2.2.1 afferma che

$$\Delta\Phi = \delta \tag{2.2.7}$$

dove δ è la *la distribuzione di Dirac* definita da

$$\delta(\varphi) = \varphi(0).$$

Una *distribuzione* è un funzionale lineare e continuo sullo spazio delle *funzioni test* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. La linearità è ovvia, mentre la continuità ha bisogno di una topologia sullo spazio $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Non è nostra intenzione di entrare di tale teoria, ma vogliamo notare che la convoluzione con la δ soddisfa $\delta * f = f$ quando è ben definita. Quindi, la proprietà (2.2.7) di essere *soluzione fondamentale* implica

$$\Delta(\Phi * f) = (\Delta\Phi) * f = \delta * f = f,$$

ovvero l'equazione non omogenea viene risolta mediante convoluzione del termine noto con la soluzione fondamentale. La scelta particolare di C_1 in Definizione 2.2.2 è fatta per avere (2.2.7) e non $\Delta\Phi = n(2-n)\omega_n\delta$, ad esempio.

[10] Denotiamo $A^C = \mathbb{R}^n \setminus A$ il complementare di A in $\mathbb{R}^n$.

2.2.2 La formula di rappresentazione di Green

Obiettivo: Sfruttare la soluzione fondamentale Φ per trovare formule di rappresentazione anche su domini (limitati) $U \subsetneq \mathbb{R}^n$.
Per fare ciò abbiamo bisogno di qualche richiamo al calcolo differenziale ed integrale in più variabili.

Definizione 2.2.3. Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ con bordo non vuoto e $k \in \mathbb{N}$. Denotiamo con $C^k(\overline{U})$ lo spazio di tutte le funzioni $u \in C^k(U)$ t.c. $D^\alpha u$ è uniformemente continua su ogni sottoinsieme limitato di U per ogni α con $|\alpha| \leq k$.

Osservazione 2.2.7. Se $u \in C^k(\overline{U})$ allora ogni derivata parziale $D^\alpha u$ di ordine $|\alpha| \leq k$ si estende con continuità a $\overline{U}$. Questa definizione è molto più adatto alle PDE ripsetto quella basata sulle restrizioni a $\overline{U}$ di funzioni di classe C^k in un intorno di $\overline{U}$. Non è solo scomodo aver bisogno di trafficare con un intorno di $\overline{U}$, ma una PDE in U vincola la funzione solo su U.

Definizione 2.2.4. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio (aperto, connesso) limitato. Diciamo che il bordo ∂U *è di classe* C^k con $k \in \mathbb{N}$ se ∂U è localmente il grafico di una funzione di classe C^k; cioè per ogni $x_0 \in \partial U$ esistono $r = r(x_0) > 0$ e $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ di classe C^k t.c. (con un eventuale rinominazione e riordinamento delle coordinate)

$$\partial U \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r : x_n = \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Osservazione 2.2.8. (Orientazione e versore normale)

a) Possiamo fissare localmente un'orientazione tramite

$$U \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r : x_n < \gamma(x') \quad \text{dove } x' = (x_1, \dots, x_{n-1})\}. \tag{2.2.8}$$

b) Se $\partial U \in C^1$, esiste un *campo vettoriale normale esterno al bordo* $\nu = \nu(x)$ definito per ogni $x \in \partial U$ [11]

Esempio 2.2.1. (∂U ipersuperficie di classe C^k) Se per ogni $x_0 \in \partial U$ esistono $B_r(x_0)$ e $\Psi \in C^k(B_r(x_0), \mathbb{R})$ t.c $D\Psi(x_0) \neq 0$ e

$$U \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) : \Psi(x) = 0\}.$$

Possiamo localmente fissare l'orientazione tramite $\Psi < 0$ su $U \cap B_r(x_0)$. Con questa scelta, si ha $\nu(x) = D\Psi(x)$.

[11] Spesso è utile indebolire la classe ai bordi *lipschitziani* dove si assume solo $\gamma \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n)$ e quindi γ è differenziable quasi-ovunque per il Teorema di Rademacher.

Nel sistema di coordinate usato in (2.2.8) il bordo è anche definito come un insieme di livello (ipersuperficie); cioè

$$\partial U \cap B_r(x_0): \quad \Psi(x', x_n) := x_n - \gamma(x') = 0 \text{ per } x \text{ vicino ad } x_0$$

e abbiamo

$$D\Psi(x) = (-D_{x'}\gamma(x'), 1)$$

che è un vettore (non nullo) ortogonale al bordo per ogni x vicino ad x_0. Dividendo per $|D\Psi(x)|$ si ha un versore normale esterno.

Definizione 2.2.5. Sia U un dominio con ∂U di classe C^1 e con $\nu = \nu(x)$ campo vettoriale normale esterno. La *derivata normale (esterna) di u in x* è la quantità

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{t}(u(x - t\nu) - u(x))\right] \qquad \text{se esiste il limite} \\ &= \langle Du(x), \nu(x)\rangle \qquad \text{se, ad esempio, } u \in C^1(\overline{U}) \end{aligned}$$

Proposizione 2.2.2 (Teorema della Divergenza)**.** *Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitato con $\partial U \in C^1$ e $V \in C^1(\overline{U}, \mathbb{R}^n)$. Allora*

$$\int_U \mathrm{div} V\, dx = \int_{\partial U} \langle V, \nu\rangle\, dS$$

dove dS è la misura di superficie su ∂U.

Dimostrazione. Risultato noto per $n = 2, 3$ dall'Analisi III, invece v. [FMS] per il caso $n \geq 4$ oppure [L2]. □

Proposizione 2.2.3 (Le identità di Green)**.** *Siano $u, v \in C^2(\overline{U})$ con $\partial U \in C^1$. Allora*

$$\int_U v\Delta u\, dx = -\int_U \langle Du, Dv\rangle\, dx + \int_{\partial U} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS \tag{2.2.9}$$

$$\int_U (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial U}\left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) dS. \tag{2.2.10}$$

Dimostrazione. Sono conseguenze quasi immediate del Teorema della Divergenza. Infatti:

i) Abbiamo l'identità differenziale

$$v\Delta u = v\mathrm{div}(Du) = \mathrm{div}(vDu) - \langle Dv, Du\rangle.$$

Intregrando su U e usando il TdD

$$\begin{aligned}\int_U v\Delta u\,dx &= \int_U \operatorname{div}(vDu) - \langle Dv, Du\rangle \\ &= \int_{\partial U} \langle vDu, \nu\rangle\,dS - \int_U \langle Dv, Du\rangle\,dx\end{aligned}$$

ma $\langle vDu, \nu\rangle = v\frac{\partial u}{\partial \nu}$.

ii) Si deve poi sommare (2.2.9) con la stessa identità scambiando il ruolo di u e v.

□

Adesso siamo pronti per il risultato principale di questa sezione. È una formula che rappresenta i valori di **ogni** funzione regolare u mediante integrali di Δu su U e u, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ su ∂U rispetto una famiglia di misure che coinvolgono Φ

Teorema 2.2.2. *Sia $u \in C^2(\overline{U})$ con $\partial U \in C^1$. Per ogni $y \in U$ si ha*

$$u(y) = \int_{\partial U}\left[u(x)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x-y) - \Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\right]dS(x) + \int_U \Phi(x-y)\Delta u(x)\,dx. \tag{2.2.11}$$

Dimostrazione. Usiamo la seconda identità di Green (2.2.10) con u e $v = \Phi(\cdot - y)$ su $U\setminus B_\varepsilon(y)$ e facciamo tendere ε a 0. Infatti

- È possibile applicare (2.2.10) perchè $\Phi(\cdot - y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{y\})$ e $\partial(U \setminus B_\varepsilon(y)) \in C^1$. Inoltre $\Delta_x \Phi(x-y) = 0$ per ogni $x \neq y$. Quindi abbiamo
$$\int_{U\setminus B_\varepsilon(y)} \Phi(x-y)\Delta u(x)\,dx = \int_{\partial U \cup \partial B_\varepsilon(y)}\left[\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x-y)\right]dS(x).$$
- Risultano $\Phi(\cdot - y) \in L^1(U_\varepsilon)$ e Δu limitata su $U_\varepsilon := U \setminus B_\varepsilon(y)$ perciò
$$\int_{U\setminus B_\varepsilon(y)} \Phi(x-y)\Delta u(x)\,dx \to \int_U \Phi(x-y)\Delta u(x)\,dx \text{ per } \varepsilon \to 0^+$$
- Abbiamo $\Phi(x-y)$ radiale attorno y e $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ continua su $\partial B_\varepsilon(y)$ perciò
$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\,dS(x)\right| \le C_n \sup_{\partial B_\varepsilon(y)}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| \varepsilon^{n-1}\begin{cases}\log \varepsilon & n = 2\\ \varepsilon^{2-n} & n \ge 3\end{cases}$$
che tende a 0 per $\varepsilon \to 0^+$.
- Usando di nuovo la simmetria radiale attorno y e la continuità di u, un semplice conto mostra che
$$-\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u(x)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x-y)\,dS(x) = \frac{1}{|\partial B_\varepsilon(y)|}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u(x)\,dS(x) \to u(y)$$
per $\varepsilon \to 0^+$

□

Esercizio 2.2.3. Verificare che $-\dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\cdot - y) = \dfrac{1}{|\partial B_\varepsilon(y)|}$ su $\partial B_\varepsilon(y)$ dato che $\nu(x) = -\dfrac{x-y}{|x-y|}$.

Osservazione 2.2.9. Nella formula di rappresentazione di Green (2.2.11), $u \in C^2(\overline{U})$ viene determinata in U tramite i valori di

$$\begin{cases} \Delta u \text{ in } U \\ u, \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ su } \partial U \text{ (ma questi sono troppi dati)} \end{cases}$$

Vogliamo eliminare la dipendenza da $\partial_\nu u_{|\partial U}$ (oppure $u_{|\partial U}$). Questo si fa tramite una "funzione correttrice" $\varphi(x;y)$ da sommare a $\Phi(x-y)$ per avere una *funzione di Green*.

Teorema 2.2.3 (Rappresentazione via funzione di Green)**.** *Sia $u \in C^2(\overline{U})$ con $\partial U \in C^1$. Se per ogni $y \in U$ esiste $\varphi(\cdot; y) \in C^2(\overline{U})$ t.c.*

$$\begin{cases} \Delta \varphi(\cdot; y) = 0 \text{ in } U \\ \varphi(\cdot; y) = -\Phi(\cdot - y) \text{ su } \partial U \end{cases} \tag{2.2.12}$$

allora

$$u(y) = \int_{\partial U} u(x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x; y)\, dS(x) + \int_U G(x; y) \Delta u(x)\, dx. \tag{2.2.13}$$

dove $G(x; y) := \Phi(x-y) + \varphi(x; y)$ è la funzione di Green per U.

Prima della dimostrazione, osserviamo che

1. G è determinata dalle richieste: $\forall y \in U$ fisso

$$\begin{cases} G(\cdot; y) - \Phi(\cdot - y) \text{ armonica in } U \\ G(\cdot; y)_{|\partial U} = 0 \end{cases}$$

2. Nel caso $u \in C^2(\overline{U})$ **armonica** abbiamo

$$u(y) = \int_{\partial U} u(x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x; y)\, dS(x). \tag{2.2.14}$$

Dimostrazione. (del Teorema 2.2.3) Usando (2.2.10) con $u = u$ e $v = \varphi(\cdot - y) \in C^2(\overline{U})$ si ha

$$0 = \int_{\partial U} \left[u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(x; y) - \varphi(x; y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right] dS(x) + \int_U \varphi(x; y) \Delta u(x)\, dx.$$

Sommando quest'identità con la formula (2.2.11) si ottiene (2.2.13). □

Osservazione 2.2.10. Se riusciamo a costruire $\varphi(\cdot; y)$ per ogni $y \in U$ (e quindi $G(\cdot; y)$ per U), abbiamo una candidata per una formula *esplicita* di rappresentazione per una soluzione del problema (di Dirichlet per l'equazione di Poisson)

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{su } \partial U \end{cases}.$$

Cioè,

$$u(y) = \int_{\partial U} g(x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x; y)\, dS(x) + \int_U G(x; y) f(x)\, dx.$$

Se il dominio U è semplice con un grado alto di simmetria, si riece a costruire G esplicitamente. Nel prossimo paragrafo, faremo esattamente questo per le palle, trovando la *formula di rappresentazione di Poisson*.

2.2.3 La formula intergrale di Poisson

Obiettivo: Trovare la funzione di Green per $U = B_R = B_R(0)$ usando la soluzione fondamentale $\Phi(x) = \Gamma(|x|)$ definita da (2.2.3).

Proposizione 2.2.4. *La famiglia di funzioni $\varphi(\cdot; y)$ per $y \in B_R$ definita da*

$$\varphi(x; y) = \begin{cases} -\Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x - y^*|\right) & y \in B_R \setminus \{0\} \\ \\ -\Gamma(R) & y = 0 \end{cases}$$

dove $y^* = R^2 \dfrac{y}{|y|^2}$ per $y \neq 0$ soddisfa per ogni $y \in B_R$

$$\begin{cases} \Delta\varphi(\cdot, y) = 0 \ \text{ in } B_R \\ \varphi(x; y)_{|\partial B_R} = -\Gamma(|\cdot - y|)_{|\partial B_R} \end{cases} \tag{2.2.15}$$

$$\begin{cases} \varphi(\cdot, y) \in C^2(\overline{B}_R) \\ \varphi(y; x) = \varphi(x; y), \ \ \forall x \in B_R \end{cases} \tag{2.2.16}$$

N.B. $y^* = \dfrac{R^2}{|y|^2} y$ è l'inversione di $y \neq 0$ rispetto alla sfera ∂B_R

Dimostrazione.

- $\Gamma\left(\dfrac{|y|}{R}|x - y^*|\right)$ è una dilatazione di una traslazione di $\Gamma(|x|)$ e quindi è armonica (risp. a x) in $\mathbb{R}^n \setminus \{y^*\}$. Quindi è armonica su B_R.
- $\Gamma(R)$ è costante e quindi armonica ovunque e otteniamo così la prima parte di (2.2.15).

- Per la seconda parte di (2.2.15) notiamo che $|x| = R$ per $x \in \partial B_R$ e abbiamo due casi:

$$y = 0: \quad \varphi(x;0) := -\Gamma(R) = -\Gamma(|x-0|)$$

$$y \neq 0: \quad \varphi(x;y) := -\Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x-y^*|\right) = -\Gamma(|x-y|)?$$

Quindi ci serve

$$|x-y| = \frac{|y|}{R}|x-y^*| \ \text{ con } |x| = R \ \text{ e } \ y^* = \frac{R^2}{|y|^2}y.$$

ovvero

$$R^2|x-y|^2 = |y|^2\left|x - \frac{R^2}{|y|^2}y\right|^2 ?$$

Ma il membro destro è

$$|y|^2\left(|x|^2 - 2\frac{R^2}{|y|^2}\langle x,y\rangle + \frac{R^4}{|y|^2}\right) = R^2(|y|^2 - 2\langle x,y\rangle + R^2)$$

che è $R^2|x-y|^2$ per $|x| = R$.

- La regolarità in (2.2.16) è ovvia.

□

Esercizio 2.2.4. Mostrare l'affermazione di simmetria in (2.2.16).

Teorema 2.2.4 (Formula integrale di Poisson)**.** *Sia $u \in C^2(\overline{B}_R)$ una funzione armonica in B_R. Allora per ogni $y \in B_R$ si ha*

$$u(y) = \int_{\partial B_R} \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R}\,\frac{u(x)}{|x-y|^n}\,dS(x). \tag{2.2.17}$$

Dimostrazione. Basta applicare la formula di Green (2.2.13) del Teorema 2.2.3 con φ definita come nella Proposizione 2.2.4 e verificare

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x;y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R}\,\frac{1}{|x-y|^n} \ \text{ per } \ x \in \partial B_R \tag{2.2.18}$$

□

Esercizio 2.2.5. Verificare la formula (2.2.18) ricordando che $\nu = x/|x| = x/R$ su ∂B_R.

Teorema 2.2.5 (Problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace)**.** *Sia $g \in C^0(\partial B_R)$. Allora*

$$u(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial B_R} \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R}\,\frac{g(x)}{|x-y|^n}\,dS(x) & y \in B_R \\ \\ g(y) & y \in \partial B_R \end{cases} \tag{2.2.19}$$

definisce una soluzione classica $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B}_R)$ *di*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R \\ u = g & \text{su } \partial B_R \end{cases} \tag{2.2.20}$$

Prima della dimostrazione, facciamo un paio di osservazioni.

Osservazione 2.2.11. Ovviamente, sfuttando l'invarianza per traslazioni dell'equazione di Laplace, otteniamo anche la soluzione del problema di Dirichlet per funzioni armoniche su ogni palla $B_R(x_0)$ centrata in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario.

Osservazione 2.2.12. La mappa di soluzione $g :\mapsto u$ fornita dal Teorema 2.2.5, definisce un *operatore integrale singolare*

$$u(y) = \int_{\partial B_R} K(x; y) g(x)\, dS(x) \tag{2.2.21}$$

dove

$$K(x; y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \frac{1}{|x - y|^n} \tag{2.2.22}$$

è il *nucleo di Poisson*.

Dimostrazione. (del Teorema 2.2.5)
Passo 1 ($u \in C^\infty(B_R)$ ed è armonica): Si sfruttano alcune proprietà del nucleo di Poisson (2.2.22). In particolare

- È ovvio che $K(x; y)$ è C^∞ per $|x| \leq R, |y| < R, x \neq y$
- Si mostra che $\Delta_y K(x; y) = 0$ per $|x| = R, |y| < R$. Per farlo, o si fa il calcolo esplicito oppure si sfrutta la simmetria $G(x; y) = G(y; x)$ per realizzare che $G(x; y)$ è armonica in y per $y \neq x$. Ma allora $K(x; y) = \dfrac{\partial G}{\partial \nu_x}(x; y)$ è armonica in y.
- Possiamo derivare sotto il segno di integrale per trovare

$$\Delta_y u(y) = \int_{\partial B_R} \Delta_y (K(x; y)) g(x)\, dS(x) = 0.$$

Passo 2 ($u \in C^0(\overline{B}_R)$ e $u = g$ su ∂B_R):

- Sfruttiamo un'altra proprietà di K:

$$\int_{\partial B_R} K(x; y)\, dS(x) = 1, \quad \forall\, y \in B_R. \tag{2.2.23}$$

Infatti, la funzione $w(x) \equiv 1$ su $\overline{B}_R$ è $C^2(\overline{B}_R)$, è armonica in B_R e soddisfa $w \equiv 1$ su ∂B_R. Per la FIP[12] abbiamo

$$1 = \int_{\partial B_R} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x;y)\, dS(x) = \int_{\partial B_R} K(x;y)\, dS(x), \quad y \in B_R.$$

- Adesso facciamo delle stime. Fissato $y_0 \in \partial B_R$ vogliamo mostrare che: per ogni $\varepsilon > 0$ esite $\delta_0 > 0$ t.c.

$$|u(y) - g(y_0)| < \varepsilon \text{ se } |y - y_0| < \delta_0, y \in B_R. \tag{2.2.24}$$

- $g \in C^0(\partial B_R)$ perciò esistono δ, M t.c.

$$\begin{cases} |g(z) - g(y_0)| < \varepsilon/2 & z \in \partial B_R, |z - y_0| < 2\delta \\ |g(z)| \le M & z \in \partial B_R \end{cases} \tag{2.2.25}$$

- Usando (2.2.21) abbiamo

$$|u(y) - g(y_0)| = \left| \int_{\partial B_R} K(x;y) \left[g(x) - g(y_0) \right] dS(x) \right|$$

Spezzando B_R ed usando la continuità di g (formule (2.2.24)-(2.2.25)):

$$\begin{aligned} |u(y) - g(y_0)| &< \frac{\varepsilon}{2} \int_{\partial B_R \cap B_{2\delta}(y_0)} K(x;y)\, dS(x) + 2M \int_{\partial B_R \setminus B_{2\delta}(y_0)} K(x;y)\, dS(x) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + 2M \int_{\partial B_R \setminus B_{2\delta}(y_0)} \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \frac{1}{|x-y|^n}\, dS(x) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + 2M \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} n\omega_n R^{n-1} \sup_{\partial B_R \setminus B_{2\delta}(y_0)} \frac{1}{|x-y|^n} \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{cases} |y - y_0| < \delta \\ |x - y_0| > 2\delta \end{cases} \Rightarrow |x - y| \ge |x - y_0| - |y_0 - y| > 2\delta - \delta,$$

perciò

$$|u(y) - g(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + 2M(R^2 - |y|^2) R^{n-2} \frac{1}{\delta^n}$$

per ogni $y \in B_\delta(y_0) \cap B_R$ con ε, δ fissi. Quindi, scegliendo y ancora più vicino ad y_0 (in $B_R \cap B_{\delta_0}(y_0)$ con $\delta_0 \le \delta$), possiamo dire che

$$R^2 - |y|^2 < \frac{\delta^n}{2MR^{n-2}} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quindi

$$|u(y) - g(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + 2M(R^2 - |y|^2) R^{n-2} \frac{1}{\delta^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

[12] Formula integrale di Poisson

□

Osservazione 2.2.13. Nella formula integrale di Poisson

$$u(y) = \int_{\partial B_R} \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \frac{u(x)}{|x-y|^n}\, dS(x)$$

per una funzione $u \in C^2(\overline{B}_R)$ armonica in B_R, andando a valutare $y = 0$ si trova

$$u(0) = \int_{\partial B_R} \frac{R^2}{n\omega_n R} \frac{u(x)}{|x|^n}\, dS(x) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R} u(x)\, dS(x). \tag{2.2.26}$$

Cioè, il valore di u nel centro della palla è uguale alla sua media sulla sfera ∂B_R. Ovviamente, possiamo usare qualsiasi raggio $r \leq R$. Questa proprietà sarà il soggetto del prossimo paragrafo.

2.2.4 Proprietà del valor medio

Come appena notato, esistono delle proprietà di valor medio per funzioni armoniche su sfere.

Teorema 2.2.6. *Sia $u \in C^2(U)$ armonica in U aperto. Allora per ogni palla $B_R(y) \subset\subset U$* [13] *si ha*

$$\text{(VM1)} \quad u(y) = \fint_{\partial B_R} u(x)\, dS(x) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R} u(x)\, dS(x) \tag{2.2.27}$$

$$\text{(VM2)} \quad u(y) = \fint_{B_R} u(x)\, dx = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R} u(x)\, dx \tag{2.2.28}$$

Dimostrazione. (via FIP)
(VM1): $v(x) := u(x + y)$ è armonica e $C^2(\overline{B}_R(0))$ e quindi per la formula (2.2.26)

$$u(y) = v(0) = \frac{1}{|\partial B_R(0)|} \int_{|z|=R} v(z)\, dS(z) = \frac{1}{|\partial B_R(y)|} \int_{|x-y|=R} v(x-y)\, dS(x).$$

(VM2): Applicando Fubini per le bucce e (VM1) su ogni sfera di raggio $r \in (0, R]$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{B_R(y)} u(x)\, dx &= \int_0^R \left(\int_{\partial B_r(y)} u(x)\, dS(x) \right) dr \\ &= \int_0^R n\omega_n r^{n-1} u(y)\, dr = u(y)\omega_n r^n|_0^R \\ &= u(y)|B_R(y)| \end{aligned}$$

□

[13] $B \subset\subset U$ con U aperto vuol dire B ha chiusura compatta in U; cioè $\overline{B}$ compatto e $\overline{B} \subset U$

N.B. Nella dimostrazione abbiamo usato (VM1) su ogni sfera $\partial B_r(y)$ con $r \in (0, R]$ per mostrare (VM2) e questo fatto sfrutta solo la continuità di u. Possiamo dire molto di più.

Definizione 2.2.6. Sia $u \in C^0(U)$. Diciamo che:

i) *u soddisfa la proprietà* (MVP1) $\Leftrightarrow$ vale (VM1) per ogni $B_R(y) \subset\subset U$

ii) *u soddisfa la proprietà* (MVP2) $\Leftrightarrow$ vale (VM2) per ogni $B_R(y) \subset\subset U$

Osservazione 2.2.14. Quindi abbiamo visto che per $u \in C^0(U)$, (MVP1) $\Rightarrow$ (MVP2). Vale anche il viceversa e quindi abbiamo

$$\forall\, u \in C^0(U) : \text{(MVP1)} \Leftrightarrow \text{(MVP2)}.$$

per una dimostrazione, si può vedere §2.2.2 di [E].

Osservazione 2.2.15. Per le funzioni armoniche vale la proprietà del valor medio. È vero anche il contrario. Funzioni con la proprietà del valor medio devono essere C^∞ e sono armoniche. Ci limiteremo a mostrare che sono armoniche per funzioni C^2, ma tramite mollificazione si può estendere il seguente risultato anche a funzioni continue.

Teorema 2.2.7. *Sia $u \in C^2(U)$ che soddisfa (MVP1). Allora u è armonica in U.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che $\exists\ y \in U$ t.c. $\Delta u(y) \neq 0$ (supponiamo $\Delta u(y) > 0$).

- Scegliamo $B_R(y) \subset\subset U$ t.c. $\Delta u(x) > 0$ per ogni $x \in B_R(y)$ (permanenza del segno).
- Consideriamo le medie integrali

$$\varphi(r) := \fint_{\partial B_r(y)} u(x)\, dS(x) = u(y), \quad \forall\, r \in (0, R].$$

Quindi φ è una funzione costante e abbiamo

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi'(r) = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(y)} u(x)\, dS_r(x)\right] \\
&= \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{z\in\partial B_1(0)} u(y+rz)\, r^{n-1} dS_1(x)\right] \\
&= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} Du(y+rz)\cdot z\, dS_1(z) \\
&= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} Du(y+rz)\cdot \nu\, dS_1(z) \\
&= \frac{1}{n\omega_n} \int_{B_1(0)} \Delta u(y+rz)\, dz \\
&= \frac{1}{n\omega_n r^n} \int_{B_r(y)} \Delta u(x)\, dx > 0,
\end{aligned}$$

assurdo.

□

Osservazione 2.2.16. Esistono numerose applicazioni della proprietà del valor medio; ad esempio

1. Principi di massimo/minimo: soggetto del prossimo paragrafo;
2. Regolarità: $u \in C^0(U)$ con (MVP2) $\Rightarrow u \in C^\infty(U)$;
3. Stime sulle derivate di funzioni armoniche: $|D^\alpha u(x_0)| \leq C_k r^{-n-k} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}$;
4. Teorema di Liouville: u armonica e limitata in $\mathbb{R}^n \Rightarrow u$ costante;
5. Disuguaglianza di Harnack: $u \in C^2(U)$ armonica, **non negativa** $\Rightarrow \forall\, V \subset\subset U$ esiste $C = C(V)$ t.c.
$$\sup_V u \leq C \inf_V u.$$

Si può consulatare § 2.2.3 di Evans [5] per le dimostrazioni di 2,3,4,5.

2.2.5 Principi di massimo

Come preannunciato, una conseguenza della proprietà del valor medio per le funzioni armoniche è la validità dei *principi di massimo/minimo*. Tali principi sono fra gli strumenti più utili e potenti per le PDE. Nei prossimi paragrafi considereremo questi principi per le equazioni del calore e delle onde e poi, nel Capitolo 4, per equazioni ellittiche del secondo ordine.

Teorema 2.2.8. *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitato. Sia $u \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$ armonica in U. Allora*

a) $\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u$ e $\min_{\overline{U}} u = \min_{\partial U} u$

b) Se esiste $x_0 \in U$ t.c. $u(x_0) = \max_{\partial U} u$ $\left(\min_{\partial U} u\right)$ allora u è costante in U (e quindi su $\overline{U}$).

N.B. La parte a) è detta *principio di massimo/minimo debole* e la parte b) *principio di massimo/minimo forte*.[14]

Dimostrazione. Dimostriamo solo i casi del massimo; le argomentazioni per i minimi sono analoghe. In alternativa, si possono sfuttare il fatto che $\min(-u) = -\max(u)$ e la linearità e omogeneità dell'equazione di Laplace.

[14] Usiamo le abbreviazioni PdM e Pdm per questi principi.

PdM forte $\Rightarrow$ PdM debole: Per la continuità di u e la compattezza di $\overline{U}$, esiste $x_0 \in \overline{U}$ t.c.

$$u(x_0) = M = \max_{\overline{U}} u.$$

La tesi è banale se $x_0 \in \partial U$. Invece, se $x_0 \in U$, abbiamo $u \equiv M$ costante e quindi la tesi.

PdM forte: Usiamo un argomento topologico. Sia $\Omega_M = \{x \in U : u(x) = M = \max_{\overline{U}} u\}$

- $\Omega_M \neq \emptyset$ per ipotesi.
- $\Omega_M = u^{-1}(\{M\})$ è chiuso perchè u continua.
- Ω_M è aperto. Infatti, essendo U aperto, esiste $B_R(x_0) \subset\subset U$ e abbiamo

$$M = u(x_0) = \fint_{B_R(x_0)} u\,dx \leq M.$$

  Quindi deve essere $u \equiv M$ su $B_R(x_0)$, ovvero $B_R(x_0) \subset \Omega_M$.

Per la connessione di U, risulta allora $\Omega_M = U$. □

Osservazione 2.2.17. Una dimostrazione diretta del PdM debole è basata sul semplice fatto

$$\Delta u = \operatorname{tr}(D^2 u) > 0 \Rightarrow \nexists \text{ massimi interni.}$$

La dimostrazione si completa tramite un argomento perturbativo.

Corollario 2.2.1 (Unicità per il problema di Dirichlet)**.** *Siano $g \in C^0(\partial U)$, $f \in C^0(U)$. Esiste al più una soluzione $u \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$ del problema*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{su } \partial U \end{cases} \tag{2.2.29}$$

Dimostrazione. Per assurdo. Supponiamo di avere due soluzioni $u_1 \neq u_2$, allora la differenza $u = u_1 - u_2 \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$ soddisfa

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } U \\ u = 0 & \text{su } \partial U \end{cases}$$

per la linearità della PDE e della BC. Per il PdM/m debole abbiamo poi

$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u = 0 \text{ e } \min_{\overline{U}} u = \min_{\partial U} u = 0.$$

□

Lo stesso argomento fornisce il secondo elemento di buona positura per il problema di Dirichlet.

Corollario 2.2.2 (Dipendenza continua dai dati)**.** *Siano* $f \in C^0(U), g_1, g_2 \in C^0(\partial U)$ *e* $u_1, u_2 \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$ *soluzioni del problema*

$$\begin{cases} \Delta u_k = f & \text{in } U \\ u_k = g_k & \text{su } \partial U \end{cases} \quad k = 1, 2$$

Allora

$$\max_{\overline{U}} |u_1 - u_2| = \max_{\partial U} |g_1 - g_2|$$

Esercizio 2.2.6. Dimostrare il corollario sopra.

Osservazione 2.2.18. Per quanto riguarda la buona positura per le soluzioni classiche del problema (2.2.29), abbiamo:

1. unicità (Corollario 2.2.1);
2. dipendenza continua dai dati nel caso $f = 0$ (Corollario 2.2.2);
3. esistenza nel caso $f = 0$ e $U = B_R(x_0)$.

Si può fare di meglio:

- Esistenza per U più generico e $f = 0$ con l'aiuto del PdM: il *metodo di Perron (super/sub soluzioni)* oppure il *metodo alternante di Schwarz* (v. Gilbarg-Trudinger [6] oppure Dautray-Lions [4]);
- Esistenza per $f \neq 0$ e dipendenza continua da f (con U generico) con l'aiuto del *potenziale di Newton* $N(f) = \Phi * f$ (v. Gilbarg-Trudinger [6]);

2.3 L'equazione del calore

Obiettivo: Sviluppare formule di rappresentazione per

(H) $u_t - \Delta u$ in $U \times I \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ aperto

(HN) $u_t - \Delta u = f$ in $U \subseteq \mathbb{R}^n$ con $f = f(x, t)$

dove $u = u(x, t)$ e $\Delta = \sum_{j=1}^n D^2_{x_j}$.
Dato che la PDE ha due derivate in x ma una solo in t, la seguente nozione di soluzione è naturale.

Definizione 2.3.1. Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Una *soluzione regolare* di (H) o (HN) in $U \times I$ è una soluzione $u \in C^2_1(U \times I)$, lo spazio di funzioni con derivate parziale continue fino al secondo ordine in x e fino al primo ordine in t.

2.3.1 La soluzione fondamentale

Anche in questo caso, il punto di partenza è di determinare le soluzioni con massima simmetria.

Osservazione 2.3.1. (Invarianze) Sia u soluzione regolare di (H) in $U \times I$. Allora sono soluzioni regolari anche le traslazioni in x, t, le rotazioni in x, e le dilatazioni "paraboliche" di u:

i) $\forall\ p \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}$: $\quad u_{p,\tau}(x,t) := u(x-p, t-\tau)$ per $x \in U + \{p\}, t \in I + \{\tau\}$;

ii) $\forall\ T \in O(n)$: $\quad u_T(x,t) := u(Tx,t)$ per $x \in T^{-1}(U), t \in I$;

iii) $\forall\ \lambda > 0$: $\quad u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ per $x \in \lambda^{-1}U, t \in \lambda^{-2}I$.

Esercizio 2.3.1. Verificare le affermazioni fatte nell'Osservazione 2.3.1

Queste invarianze suggeriscono la ricerca di soluzioni u radiali in x; cioè della forma

$$u(x,t) = \varphi(|x|,t) \text{ con } \varphi : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tag{2.3.1}$$

e *omogenee rispetto alle dilatazioni paraboliche*; cioè soluzioni aventi la proprietà

$$u_\lambda(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^\gamma u(x,t) \text{ (per qualche } \gamma \in \mathbb{R}), \ \lambda > 0, x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}. \tag{2.3.2}$$

Proposizione 2.3.1. *Le funzioni $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definite da*

$$u(x,t) = C_1 t^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} + C_2, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.3.3}$$

sono soluzioni regolari di (H) radiali e omogenee di grado $\gamma = -n$ (rispetto alla dilatazione parabolica).

Dimostrazione. Basta fare due conti per controllare che queste funzioni siano omogenee di grado $-n$ e sono soluzioni regolari di (H). Mostriamo invece come vengono ricavate al fine di illustrare un metodo.

- La radialità (2.3.1) e l'omogenità (2.3.2) usando $\lambda = 1/\sqrt{t}$ diano la relazione

  $$\varphi(|x|/\sqrt{t}, 1) = t^{-\gamma/2}\varphi(|x|,t),$$

  ovvero

  $$u(x,t) = \varphi(|x|,t) = t^{\gamma/2} v(|x|/\sqrt{t}) \text{ con } v : [0,+\infty) \to \mathbb{R} \text{ da trovare.}$$

- Ponendo $s = |x|^2/t$, un conto semplice mostra che

$$u_t - \Delta u = t^{\frac{\gamma}{2}-1}\left[4sv''(s) + (2n+s)v'(s) - \frac{\gamma}{2}v(s)\right] = 0,$$

perciò la funzione v deve soddisfare l'ODE

$$4sv''(s) + (2n+s)v'(s) - \frac{\gamma}{2}v(s) = 0.$$

- Andando a cercare soluzioni esponenziali $v(s) = e^{\alpha s}$, abbiamo bisogno di

$$4s\alpha^2 + (2n+s)\alpha - \frac{\gamma}{2} = 0 \text{ per ogni } s > 0,$$

ovvero

$$4\alpha^2 + \alpha = 0 \quad \text{e} \quad 2n\alpha - \frac{\gamma}{2} = 0.$$

- Dalla prima relazione, otteniamo due casi:

$$\alpha = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \text{ e } v(s) = 1 \Rightarrow u = 1$$

$$\alpha = -1/4 \Rightarrow \gamma = -n \text{ e } v(s) = e^{-s/4} \Rightarrow u = t^{-n/2}e^{-|x|^2/(4t)}.$$

- Prendendo combinazioni lineari di questi soluzioni (la PDE è lineare ed omogenea) arriviamosi arriva a (2.3.3).

□

La restrizione a $t > 0$ (oppure $t > t_0 \in \mathbb{R}$) sarà sempre più chiara nel seguito, per il momento diciamo diciamo solo che "fa comodo" guardare avanti nel tempo.

Definizione 2.3.2. La *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore è la funzione

$$\Phi(x,t) = \Gamma(|x|,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-|x|^2/4t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.3.4}$$

La scelta della costante C_1 è stata fatta in modo da avere la seguente proprietà cruciale.

Lemma 2.3.1. $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\,dx = 1$ *per ogni* $t > 0$.

Dimostrazione. Basta calcolare:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\,dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/4t}\,dx \quad \left(z = \frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2}\,dz \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}}\prod_{j=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_j^2}\,dz_j\right) = 1. \end{aligned}$$

□

Osservazione 2.3.2. Altre proprietà di Φ sono:

a) Per ogni $t > 0$ fisso, $\Phi(\cdot, t)$ è una misura di probabilità gaussiana su $\mathbb{R}^n$;

b) Per ogni $x_0 \neq 0$ fisso, $\lim_{t\to 0^+} \Phi(x_0, t) = 0$;

c) Invece, nel senso delle distribuzioni $\lim_{t\to 0^+} \Phi(\cdot, t) = \delta(\cdot)$, cioè

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t)\varphi(x)\, dx = \varphi(0), \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Solo la parte c) richiede qualche giustificazione, ma è un comportamento naturale dato che la famiglia di misure di probabilità $\Phi(\cdot, t)$ si sta concentrando in $x = 0$ per $t \to 0^+$.

2.3.2 Formule di soluzione per il problem di Cauchy

Una prima formula di rappresentazione è la seguente formula di soluzione.

Teorema 2.3.1 (Soluzione del problema di Cauchy per l'eq. del calore)**.** *Sia* $g \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$[15] *Allora la funzione* $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t)g(y)\, dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy \tag{2.3.5}$$

è soluzione regolare di [16]

$$\begin{cases} \text{(H)} & u_t - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ \text{(IC)} & u = g \qquad\quad \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2.3.6}$$

Più precisamente

a) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ *soddisfa (H);*

b) u soddisfa (IC) nel senso che

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x, t) = g(x_0), \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3.7}$$

Dimostrazione. 1. Abbiamo $\Phi(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ con derivate della forma

$$D^\alpha \Phi = P_\alpha\left(x, \frac{1}{t}\right)\Phi \ \text{ con } \ P_\alpha \ \text{ un polinomio,}$$

dove $\Phi(x, t)$ ha decadimento esponenziale in x uniformemente in t per $t \geq \tau > 0$. Quindi per ogni $\tau > 0, \alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ esiste $C_{\alpha,\tau}$ t.c.

$$|D^\alpha \Phi(x, t)| \leq C_{\alpha,\tau} \frac{1}{(1 + |x|)^{n+1}}, \quad \forall\, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [\tau, +\infty)$$

[15] Cioè g è continua e limitata su $\mathbb{R}^n$. Forse sarebbe meglio scrivere $g \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$.

[16] Da qui in avanti useremo la notazione $\{t = 0\} = \{(x, t) :\ t = 0\}$.

$\Rightarrow$ possiamo derivare u sotto il segno di integrale per ogni $t > 0$
$\Rightarrow u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ e

$$u_t - \Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} (\Phi_t - \Delta\Phi)(x-y,t) g(y)\, dy = 0.$$

2. Per mostrare (IC)fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

   - Dalla continuità di g: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ t.c. $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$ se $y \in \mathbb{R}^n, |y - x_0| < \delta$.
   - Per il Lemma 2.3.1 abbiamo

$$\begin{aligned} |u(x,t) - g(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\,[g(y) - g(x_0)]\, dy \right| \\ &\leq \int_{B_\delta(x_0)} |\cdot|\, dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} |\cdot|\, dy := I + J \end{aligned}$$

   - Stimando I troviamo

$$I \leq \varepsilon \int_{B_\delta(x_0)} \Phi(x-y,t)\, dy \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, dy = \varepsilon.$$

   - Stimando J troviamo

$$\begin{aligned} J &\leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \Phi(x-y,t)\, dy \\ &= 2\|g\|_{L^\infty} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy \end{aligned}$$

   dove $|y - x_0| \geq \delta$. Dato che $x \to x_0$ possiamo considerare solo x t.c. $|x - x_0| < \delta/2$ per cui

$$|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x_0| \ \text{ per ogni } y \notin B_\delta(x_0), x \in B_{\delta/2}(x_0).$$

   Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} J &\leq C_{n,g} \frac{1}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}}\, dy \quad (|y - x_0| := r) \\ &= C_{n,g} \frac{1}{t^{n/2}} \int_\delta^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{16t}} n\omega_n r^{n-1}\, dr \quad \text{(Fubini per le bucce)} \\ &= C'_{n,g} \frac{1}{t^{n/2}} \int_\delta^{+\infty} r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{16t}}\, dr \\ &\leq n!\, C'_{n,g} \frac{1}{t^{n/2}} \int_\delta^{+\infty} r^{n-1} \left(\frac{16t}{r^2}\right)^n dr \quad (e^s \geq s^n/n!) \\ &= C''_{n,g} t^{n/2} \int_\delta^{+\infty} r^{-n-1}\, dr \quad \text{(integrale finito)} \\ &= C_{n,g,\delta} t^{n/2} \to 0 \ \text{ per } \ t \to 0^+ \ \text{ (con } \delta \text{ fisso)}. \end{aligned}$$

□

Osservazione 2.3.3. (Velocità infinita di propagazione dell'informazione) Dalla formula di soluzione (2.3.5) si ha:

a) Se $u(x,0) = g(x) \geq 0$ ha supporto compatto in $\mathbb{R}^n$ e $g \not\equiv 0$ abbiamo

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)\,dy > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Cioè, il supporto di u si propaga su tutto $\mathbb{R}^n$ in modo istantaneo.

b) D'altre parte

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy$$

per Fubini e per il Lemma 2.3.1. Cioè la massa totale di $u(x,0)$ si conserva.

c) Quindi, la "coda" di u all'infinito per $t > 0$ è da interpretare in modo probabilistico. È presente ma è esponenzialmente piccola ed "improbabile".

Osservazione 2.3.4. (Regolarizzazione istantanea) La convoluzione di g continua con il nucleo di calore $\Phi(\cdot,t)$ produce una funzione C^∞ in x e t per ogni $t > 0$. Per questo motivo si ritrova Φ in molti contesti.

Domanda: Cosa fare con l'equazione nonomogenea (HN)? Più precisamente, possiamo risolvere il problema di Cauchy?

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2.3.8}$$

dove $f = f(x,t)$ è una funzione data.
Risposta: (Principio di Duhamel) Discende dal metodo di variazione delle costanti usato per le ODE

1. Sfruttando la linearità, ci basta risolvere il problema (2.3.8) nel caso di $g = 0$

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2.3.9}$$

Infatti, la soluzione u di (2.3.8) è data dalla somma $u = u_{0,f} + u_{g,0}$ delle soluzioni $u_{0,f}$ di (2.3.9) e $u_{g,0}$ di (2.3.6).

2. Cerchiamo la soluzione di (2.3.9) della forma

$$u(x,t) = \int_0^t u(x,t;s)\,ds \tag{2.3.10}$$

dove $u(\cdot,\cdot;s)$ è la soluzione del problema di Cauchy a tempo s; cioè

$$\begin{cases} u_t(\cdot,\cdot;s) - \Delta u(\cdot,\cdot;s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s,+\infty) \\ u(\cdot,s;s) = f(\cdot,s) & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t=s\} \end{cases} \tag{2.3.11}$$

Infatti, con u definita da (2.3.10) otteniamo

$$u_t(x,t) = u(x,t;t) + \int_0^t u_t(x,t;s)\,ds \quad \text{e} \quad \Delta u(x,t) = \int_0^t \Delta u(x,t;s)\,ds$$

Usando (2.3.11) abbiamo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u(x,t;t) = f(x,t) \\ u(x,0) = \int_0^0 u(x,0;s)\,ds = 0 \end{cases}$$

3. Per risolvere (2.3.11), usiamo la *formula di Duhamel*:

$$u(x,t;s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s)\,dy. \tag{2.3.12}$$

Infatti:

- $(x,t) \mapsto \Phi(x-y,t-s)$ risolve (H) per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ fisso e $t > s$;
- al tempo $t = s$, si riproduce $f(x,s)$.

Teorema 2.3.2. *Sia $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ con supporto compatto. Allora la funzione definita da*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s) f(y,s)\,dy \right) ds, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y,s)\,dy \right) ds \end{aligned}$$

soddisfa:

i) $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty))$;

ii) $u_t - \Delta u = f$ *in* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$;

iii) $\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = 0$ *per ogni* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Consultare Evans [5] - Theorem 2.3.2. □

Osservazione 2.3.5. Combinando il Teorema 2.3.1 con il Teorema 2.3.2 possiamo risolvere il problema (2.3.8):

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u = g & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

con $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ a supporto compatto e $g \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2.3.3 Bolle di calore e proprietà del valor medio per soluzioni regolari

Punto: Anche per l'equazione del calore, esiste un PdVM compatibile con la struttura *parabolica* della PDE.

Definizione 2.3.3. Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato e $T > 0$. Si definisce:

a) *cilindro parabolico* l'insieme $U_T := U \times (0, T]$;

b) *bordo parabolico* l'insieme $\Gamma_T := \overline{U_T} \setminus U_T \times (0, T] = \partial U_T \setminus \{U \times \{t = T\}\}$;

Definizione 2.3.4. Per $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, r > 0$ l'insieme

$$E(x,t;r) = \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ s \le t, \Phi(x-y, t-s) > \frac{1}{r^n}\right\} \tag{2.3.13}$$

è detta *bolla di calore* (basata in (x,t) con raggio r) dove

$$\Phi(x-y,t-s) = \begin{cases} \frac{1}{[4\pi(t-s)]^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} & t > s \\ 0 & t < s \end{cases}$$

è una traslazione nello spazio-tempo del nucleo del calore Φ.

Osservazione 2.3.6. (Forma di $E(x,t;r)$)

a) Il punto di base (x,t) si trova sulla cima della bolla;

b) Le fette $E(x_0,t_0;r) \cap \{t = t_r \in (t_0 - r^2/(4\pi), t_0)\}$ sono palle in $\mathbb{R}^n$ con centro x_0.

Esempio 2.3.1. ($E(r) := E(0,0;r) = \{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ s \le 0, \Phi(-y,-s) > 1/r^n\}$)

- Per $s \le 0$ si chiede per quali (y,s) risulta $\Phi(-y,-s) = \dfrac{1}{(-4\pi s)^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2}{-4s}} > \dfrac{1}{r^n}$.
- Per $s < 0$ fisso: ci serve

$$e^{\frac{|y|^2}{4s}} > \frac{(-4\pi s)^{n/2}}{r^n} = \left(\frac{\sqrt{-4\pi s}}{r}\right)^n$$

ovvero

$$|y|^2 < 4sn \log\left(\frac{\sqrt{-4\pi s}}{r}\right) := \rho^2,$$

che determina una palla euclidea di raggio $\rho = \rho(s,n,r)$ **se** l'espressione sopra è positiva. Questo accade quando l'argomento del logaritmo è più piccolo di 1, ovvero

$$\sqrt{-4\pi s} < r \Leftrightarrow s > -\frac{r^2}{4\pi}.$$

Otteniamo duindi delle palle quando $-r^2/(4\pi) < s < 0$ o un'insieme vuoto quando $s < -r^2/(4\pi)$.

Teorema 2.3.3. *Sia $u \in C_1^2(U_T)$ una soluzione regolare di (H) in U_T. Allora per ogni bolla di calore $E(x,t;r) \subset\subset U_T$ si ha*

$$(VM) \quad u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(x,t;r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\, dyds. \tag{2.3.14}$$

Dimostrazione. Consultare Evans [5] - Theorem 2.3.3. Il punto chiave è che la funzione

$$\varphi(r) := \frac{1}{4r^n} \int_{E(r)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2}\, dyds$$

soddisfa $\varphi'(r) = 0$. □

Osservazione 2.3.7. (Sulla formula (VM))

a) La formula (VM) rappresenta $u(x,t)$ tramite i valori che assume all'interno della bolla di calore e perciò i valori di $u(y,s)$ con $t^* < s < t$;

b) La formula **non** è della forma

$$u(x,t) = \frac{1}{|E(x,t;r)|} \int_{E(x,t;r)} u(y,s)\, dyds \quad \text{(media con misura di Lebesgue } |E(x,t;r)|)$$

ma è della forma

$$u(x,t) = \frac{1}{\mu(E(x,t;r))} \int_{E(x,t;r)} u(y,s)\, d\mu_{(x,t)}(y,s)$$

con una *misura di calore* μ;

c) Un conto mostra che

$$\frac{1}{r^n} \int_{E(r)} \frac{|y|^2}{s^2}\, dyds = \int_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2}\, dyds = 4$$

che è (VM) per $(x,t) = (0,0)$ e $u \equiv 1$.

2.3.4 Principio di massimo/minimo per soluzioni regolari

Come nel caso dell'equazione di Laplace, andiamo a cercare alcune conseguenze della formula (VM).

Teorema 2.3.4 (Principio di massimo debole e forte)**.** *Sia $u \in C_1^2(U_T) \cap C^0(\overline{U}_T)$ una soluzione regolare di (H) in U_T. Allora*

a) $\max_{\overline{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$;

b) Se esiste $(x_0,t_0) \in U_T$ t.c. $u(x_0,t_0) = M = \max_{\overline{U}_T} u$, allora $u \equiv M$ in $\overline{U}_{t_0}$

Valgono affermazioni analoghe per il minimo.

Osservazione 2.3.8. (Interpretazione termodinamica)

- La parte a) dice che la temperatura massima/minima si trova o all'istante iniziale ($t = 0$) oppure sul bordo del dominio ∂U per $t \in (0, T]$.
- La parte b) dice che **se** la temperatura massima/minima si trova all'interno di U per qualche tempo $t_0 \in (0, T)$, **allora** abbiamo già equilibrio termodinamico, ovvero $u \equiv u_0$ per $t < t_0$.
- Inoltre, **se** $u \equiv u_0$ su Γ_{t_0}, **allora** $u \equiv u_0$ in $\overline{U}_{t_0}$. Ma in tal caso, le condizioni al contorno per $t > t_0$ possono indurre cambiamenti nel tempo.

Dimostrazione. (del Teorema 2.3.4)

b) $\Rightarrow$ a): Per la continuità di u esiste $M = \max_{\overline{U}_T} u$. Se esso viene assunto sul bordo parabolico Γ_T, abbiamo finito. Altrimenti, M sarà assunto in un punto (x_0, t_0) nell'interno parabolico U_T, perciò $u \equiv M$ su $\overline{U}_{t_0}$. Quindi anche su Γ_{t_0}.

b) Sia $(x_0, t_0) \in U_T$ t.c. $u(x_0, t_0) = M$

1. Esiste $E(x_0, t_0; R) \subset\subset U_T$ e per (VM) abbiamo

$$\begin{aligned} M = u(x_0, t_0) &= \frac{1}{4R^2} \int_{E(x_0,t_0;R)} u(y,s) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} \, dsdy \\ &\leq \frac{M}{4R^2} \int_{E(x_0,t_0;R)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} \, dsdy \\ &= \frac{M}{4R^2} \int_{E(R)} \frac{|\tilde{y}|^2}{(\tilde{s})^2} \, d\tilde{s}d\tilde{y} = M \quad (\tilde{y} = y - x_0, \tilde{s} = s - t_0) \end{aligned}$$

   Quindi $u \equiv M$ su $E(x_0, t_0; R)$

2. Sia $L \subset U_T$ un segmento $[(x_0, t_0), (y_0, s_0)]$ con $s_0 < t_0$.
   - Per la convessità di $E(x_0, t_0; R)$, si ha $L \cap E(x_0, t_0; R) \neq \emptyset$. Quindi si ha $u \equiv M$ lungo L per un po'.
   - Sia $\sigma_0 := \min\{s \geq s_0 : \ u \equiv M \text{ per ogni } (x, t) \in L \text{ con } s \leq t \leq t_0\}$.
   - Si ha $\sigma_0 = s_0$. Infatti, se per assurdo $\sigma_0 > s_0$ avremmo $u(z_0, \sigma_0) = M$ con $(z_0, \sigma_0) \in L$. Quindi per il punto 1, $u \equiv M$ su $E(z_0, \sigma_0; r) \subset\subset U_T$ con r piccolo. Per la convessità delle bolle E, otterremmo allora $[E(z_0, \sigma_0; r) \cap L] \setminus \{(z_0, \sigma_0)\} \neq \emptyset$. Quindi $u \equiv M$ su L, assurdo.

- Per la connessione di U, abbiamo $U \times [0, t_0]$ connesso per poligonali; cioè per ogni $(x, t) \in U \times [0, t_0]$ esiste

$$[(x_0, t_0), (x_1, t_1)] \times \cdot \times [(x_{N-1}, t_{N-1}), (x, t)] \subset U_{t_0}$$

con $t_0 > t_1 > \cdot > t_N = t$.
- Quindi, applicando N volte il punto 2, otteniamo $u(x, t) = M$.

□

Come per l'equazione di Laplace, il principio di massimo debole fornisce informazioni sulla buona positura dei problemi al contorno.

Teorema 2.3.5. *Siano $g \in C^0(\Gamma_T)$, $f \in C^0(U_T)$. Allora esiste al più una soluzione regolare $u \in C^2_1(U_T) \cap C^0(\overline{U}_T)$ del problema di Cauchy-Dirichlet* [17]

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T \\ u = g & \text{su } \Gamma_T \end{cases} \tag{2.3.15}$$

Dimostrazione. Usiamo la linearità ed il PdM/m.

- Sia $u = u_1 - u_2$, con u_1, u_2 due soluzioni regolari di (2.3.15). Allora u è soluzione regolare di

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_T \end{cases}$$

- Per il PdM/m debole (Teorema 2.3.4), abbiamo

$$\max_{\overline{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u = 0 \ \text{ e } \min_{\overline{U}_T} u = \min_{\Gamma_T} u = 0.$$

□

Teorema 2.3.6 (Dipendenza continua dai dati)**.** *Siano $g_1, g_2 \in C^0(\Gamma_T)$, $f \in C^0(U_T)$ e $u_1, u_2 \in C^2_1(U_T) \cap C^0(\overline{U}_T)$ soluzioni del problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T \\ u = g_k & \text{su } \Gamma_T \end{cases} \quad k = 1, 2$$

Allora

$$\max_{\overline{U_T}} |u_1 - u_2| = \max_{\Gamma_T} |g_1 - g_2|$$

Dimostrazione. Di nuovo, basta usare la linearità ed il PdM/m debole. □

[17] La funzione g fornisce sia il valore al contorno spaziale ∂U che il valore iniziale in $t = 0$.

Osservazione 2.3.9. (Unicità per il problema di Cauchy in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$) Serve una limitazione sulla crescita di u all'infinito del tipo

$$u(x,t) \le Ae^{a|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, 0 \le t \le T. \tag{2.3.16}$$

Esiste un principio di massimo/minimo per soluzioni regolari in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ quando vale (2.3.16) - v. Theorem 2.3.6 di Evans [5]. L'unicità delle soluzioni regolari in tal caso è facile (v. Theorem 2.3.7 di Evans [5]). Invece, esistono controesempi per l'unicità quando non vale (2.3.16) - v. il libro di F. John [8].

Osservazione 2.3.10. (Commenti conclusivi) Ci sono numerose altre proprietà qualitative a portata di mano. Molte di queste si possono trovare in §2.3 di Evans [5]. Ad esempio:

1. Regolarità delle soluzioni: $C_1^2(U_T) \Rightarrow C^\infty(U_T)$ (v. Theorem 2.3.8 di Evans [5]).
2. Stime a priori (locali): sia u una soluzione regolare di (H) in U_T, allora

$$\max_{C(x,t;r/2)} \left| D_x^\alpha D_t^\beta u \right| \le C_{\alpha,\beta} r^{-(n+2+|\alpha|+2|\beta|)} \|u\|_{L^1(C(x,t;r))}$$

dove $C(x,t;r) = \{(y,s) : |x-y| \le r,\ t-r^2 \le s \le t\}$. (v. Theorem 2.3.9 di Evans [5]).

2.4 L'equazione delle onde

Obiettivo: Trovare formule di rappresentazione per le soluzioni $u = u(x,t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (\mathrm{W}) & \Box u = u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ (\mathrm{IC})_1 & u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ (\mathrm{IC})_2 & u_t(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.4.1}$$

ed esaminare delle proprietà qualitative delle soluzioni.
Enunciamo subito il risultato principale che sarà dimostrato nei prossimi paragrafi.

Teorema 2.4.1. *Siano $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $h \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Allora una soluzione $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ di (2.4.1) è data da*

$n = 1$: (D'Alembert)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy \tag{2.4.2}$$

$n = 2$*: (Poisson)*

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{B_t(x)} \frac{tg(y) + t\langle Dg(y), y - x\rangle + t^2 h(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}}\, dy \tag{2.4.3}$$

$n = 3$*: (Kirchoff)*

$$u(x,t) = \fint_{\partial B_t(x)} \left[th(y) + g(y) + \langle Dg(y), y - x\rangle\right]\, dS(y) \tag{2.4.4}$$

Esistono formule analoghe per $n \geq 4$ (v. §2.3 di Evans [5]).

Osservazione 2.4.1. Da queste formule possiamo dedurre alcune proprietà qualitative. In particolare:

a) Si ha *velocità finita di propagazione dell'informazione* in tutti i casi. Più precisamente, si ha *domini di dipendenza/influenza finiti*. Torneremo a parlare di questo punto alla fine della sezione usando dei metodi di energia. Va notato il forte contraso con ciò che succede per le soluzioni dell'equazione del calore (v. Osservazione 2.3.3).

b) Non esistono effetti di regolarizzazione; cioè ulteriore regolarità richiede dati g, h più regolari. Anche questo è in contraso con quello che succede per le soluzioni dell'equazione del calore (v. Osservazione 2.3.4).

c) La dimensione spaziale $n = 3$ è la prima in cui l'informazione propaga in modo "pulito"; cioè la soluzione $u(x_0, t_0)$ dipende solo dai dati sulle sfere $\partial B_{t_0}(x_0)$ anzichè sulle palle $B_{t_0}(x_0)$. Questo è il *principio di Huygens* e vale in dimensioni spaziali dispari.

2.4.1 Il caso $n = 1$: la formula di D'Alembert

Vogliamo mostrare il Teorema 2.4.1 nel caso $n = 1$, cioè: fissati $g \in C^2(\mathbb{R}), h \in C^1(\mathbb{R})$ la soluzione del problema di Cauchy (W) + $(\mathrm{IC})_1$ + $(\mathrm{IC})_2$ è fornita da

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\, dy.$$

- quando $n = 1$, possiamo fattorizzare l'operatore delle onde

  $$\Box = D_t^2 - D_x^2 = (D_t + D_x)(D_t - D_x) = (D_t - D_x)(D_t + D_x).$$

  Quindi ogni soluzione classica di (W) è soluzione di

  $$\Box u = (D_t + D_x)(u_t - u_x) = 0.$$

- Posto $v = u_t - u_x$, si cerca v come soluzione di un'equazione del trasporto

$$(D_t + D_x)v = 0.$$

Quindi $v(x,t) = \psi(x-t)$ per qualche $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ con $v(x,0) = \psi(x)$.

- Quindi u deve risolvere:

$$D_t u - D_x u = \psi(x-t) := f(x,t),$$

un'equazione del trasporto non omogenea. Sappiamo allora che

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \varphi(x+t) + \int_0^t f(x+t-s,s)\,ds \quad \varphi \in C^1(\mathbb{R}) \\ &= \varphi(x+t) + \int_0^t \psi(x+t-2s)\,ds \\ &= \varphi(x+t) - \frac{1}{2}\int_{x+t}^{x-t} \psi(y)\,dy \quad (y = x+t-2s;\ dy = -2\,ds) \\ &= \varphi(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(y)\,dy \end{aligned}$$

La soluzione generale dipende da due funzioni arbitrarie φ, ψ

- Usando le condizioni iniziali $(\mathrm{IC})_1, (\mathrm{IC})_2$ abbiamo

$$g(x) = u(x,0) = \varphi(x)$$

$$h(x) = u_t(x,t)_{|t=0} = \left[\varphi'(x+t) + \frac{1}{2}\left(\psi(x+t) + \psi(x-t)\right)\right]_{|t=0} = \varphi'(x) + \psi(x).$$

Quindi $\psi(x) = h(x) - g'(x)$ e abbiamo

$$\begin{aligned} u(x,t) &= g(x+t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \left[h(y) - g'(y)\right] dy \\ &= \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy \end{aligned}$$

Osservazione 2.4.2. La formula di D'Alembert può essere usata anche per problemi al contorno. Ad esempio, per

$$\begin{cases} (\mathrm{W}) & \Box u = u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } [0,+\infty) \times (0,+\infty) \\ (\mathrm{IC}) & u(x,0) = g(x),\ \ u_t(x,0) = h(x) & x \in [0,+\infty) \\ (\mathrm{BC}) & u(0,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Si usa il *metodo di riflessione*: (V.Evans [5] per i dettagli)

1. Si scelgono i prolungamenti $\hat{u}, \hat{g}, \hat{h}$ dispari in x; cioè

$$\hat{u}(-x,t) = -u(x,t), \quad x > 0.$$

2. Si usa D'Alembert per rappresentare la soluzione $\hat{u}$ con dati $\hat{g}, \hat{h}$ arrivando a

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[g(x+t) + g(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy & x \geq t \geq 0 \\ \\ \frac{1}{2}\left[g(x+t) - g(t-x)\right] + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} h(y)\,dy & 0 \leq x \leq t \end{cases} \tag{2.4.5}$$

2.4.2 I casi $n = 2, 3$: le formule di Poisson, Kirchoff

Osservazione 2.4.3. Per le dimensioni spaziali $n = 2, 3$ una possibile dimostrazione del Teorema 2.4.1 per la risoluzione del Problema di Cauchy si basa sul *metodo delle medie sferiche* dove (W) viene trasformata un'equazione del secondo ordine in (t, r) tramite

$$\begin{cases} U(x;r,t) := \fint_{\partial B_r(x)} u(y,t)\,dS(y) \\ G(x;r) := \fint_{\partial B_r(x)} g(y)\,dS(y) \\ H(x;r) := \fint_{\partial B_r(x)} h(y)\,dS(y) \end{cases} \xrightarrow{r\to 0^+} \begin{cases} u(x,t) \\ g(x) \\ h(x) \end{cases} \tag{2.4.6}$$

Lemma 2.4.1. *Siano $n \geq 2, m \geq 2, u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ soluzione di*

$$\begin{cases} \text{(W)} & \Box u = u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) \\ \text{(IC)} & u(x,0) = g(x), \;\; u_t(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ fisso, $U(x;\cdot,\cdot) \in C^m(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [0,+\infty))$ è soluzione del seguente problema di Cauchy per l'equazione di Euler-Poisson-Darboux

$$\begin{cases} \text{(EPD)} & U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,+\infty) \\ \text{(IC)} & U = G, \;\; U_t = H & \text{su } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2.4.7}$$

Dimostrazione. Per esercizio (v. Evans [5]). □

N.B. $D_r^2 + \frac{n-1}{r}D_r$ è la parte radiale di Δ in coordinate polari.

Dimostrazione. (della formula di Kirchoff: $n = 3$)
Passo 1: (Riscalamento di U)
Se $\tilde{U} = rU, \tilde{G} = rG, \tilde{H} = rH$ allora $\tilde{U}$ risolve

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 \;\; \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ \tilde{U}_{|t=0} = \tilde{G}, \;\; \tilde{U}_{t|t=0} = \tilde{H} \;\; \text{su } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \tilde{U}_{|r=0} = 0 \end{cases}$$

Infatti,

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{tt} &= rU_{tt} = r(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r) \quad (\text{EDP}, n=3)\\ &= rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = (\tilde{U}_r)_r\end{aligned}$$

$$\tilde{U}_{|t=0} = rU_{|t=0} = rG = \tilde{G}, \quad \tilde{U}_{t\,|t=0} = rU_{t|t=0} = rH = \tilde{H}, \quad \tilde{U}_{|r=0} = (rU)_{|r=0} = 0.$$

Passo 2: (Risolvere il Problema di Cauchy per $\tilde{U}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ fisso)

- Ci interessano $U, \tilde{U}$ solo per $r \to 0^+$, cioè ci basta $0 \le r \le t$.
- In tal caso, abbiamo (usando (2.4.5) dall'Oss. 2.4.2)

$$\tilde{U}(x;r,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{G}(x;t+r) - \tilde{G}(x;t-r)\right] + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(x;y)\,dy$$

Passo 3: (Determinare $u(x,t)$ facendo il limite $\lim_{r\to 0^+}$)

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r}\tilde{U}(x;r,t) \quad \left(\frac{1}{r}\tilde{U} = U\right)\\ &= \lim_{r\to 0^+}\left[\frac{\tilde{G}(x;t+r) - \tilde{G}(x;t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r}\tilde{H}(x;y)\,dy\right]\\ &= \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(x;t) + \tilde{H}(x;t)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[t \fint_{\partial B_t(x)} g(y)\,dS(y)\right] + t\fint_{\partial B_t(x)} h(y)\,dS(y) \quad (*)\end{aligned}$$

dove la formula (*) sarà utile per il caso $n = 2$. Facendo i conti si ottiene

$$u(x,t) = \fint_{\partial B_t(x)} \left(g(y) + th(y)\right)\,dS(y) + t\frac{\partial}{\partial t}\left[\fint_{\partial B_t(x)} g(y)\,dS_t(y)\right],$$

ma

$$\fint_{\partial B_t(x)} g(y)\,dS_t(y) = \fint_{\partial B_1(0)} g(x+tz)\,dS_1(z) \quad (y := x + tz)$$

e, quindi,

$$\begin{aligned}t\frac{\partial}{\partial t}\left[\fint_{\partial B_t(x)} g(y)\,dS_t(y)\right] &= t\left[\fint_{\partial B_1(0)} \langle Dg(x+tz), z\rangle\,dS_1(z)\right]\\ &= t\left[\fint_{\partial B_t(x)} \langle Dg(y), (y-x)/t\rangle\,dS_t(y)\right]\\ &= \left[\fint_{\partial B_t(x)} \langle Dg(y), y-x\rangle\,dS_t(y)\right]\end{aligned}$$

□

Dimostrazione. (della formula di Poisson: $n = 2$) Qui non esiste una trasformazione di (EPD) in (W) per $\tilde{U}(x,t;r)$. Quello che si fa è usare il *metodo della discesa*, ovvero, si cerca $u(x_1,x_2,t) = \tilde{u}(x_1,x_2,x_3,t)$ con $\tilde{u}$ una soluzione in $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ indipendente da x_3.
Passo 1: (Il problema per $\tilde{u}$)

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \Delta\tilde{u} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \times (0,+\infty) \\ \tilde{u}_{|t=0} = \tilde{g}, \quad \tilde{u}_{t_{|t=0}} = \tilde{h} \end{cases}$$

dove $\tilde{g}(x_1,x_2,x_3) := g(x_1,x_2)$ etc.
Passo 2: (Applicare Kirchoff a $\tilde{u}$)
Con $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ poniamo $\tilde{x} = (x,0) \in \mathbb{R}^3$ e abbiamo

$$u(x,t) = \tilde{u}(\tilde{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[t \fint_{\partial B_t(\tilde{x})} \tilde{g}(y)\, dS(y) \right] + t \fint_{\partial B_t(\tilde{x})} \tilde{h}(y)\, dS(y) := \frac{\partial}{\partial t}\left[t u_g(x,t) \right] + t u_h(x,t).$$

dove

$$u_g(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B_t(\tilde{x})} g(y_1,y_2)\, dS(y) = \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B_t(x)} g(y_1,y_2) \sqrt{1 + |D\gamma(y_1,y_2)|^2}\, dy_1 dy_2,$$

con $\gamma(y) = (t^2 - |y-x|^2)^{1/2}$ la funzione con grafico uguale alla sfera superiore. Un conto mostra che

$$u_g(x,t) = \frac{1}{2\pi t} \int_{B_t(x)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}}\, dy = \frac{t}{2} \fint_{B_t(x)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}}\, dy.$$

Abbiamo poi

$$u_h(x,t) = \frac{t}{2} \fint_{B_t(x)} \frac{h(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}}\, dy.$$

Calcolando infine l'espressione $\frac{\partial}{\partial t}\left[t u_g(x,t) \right] + t u_h(x,t)$ si ottiene la formula di Poisson. □

Osservazione 2.4.4. Come per l'equazione del calore, esiste un principio di Duhamel per trattare il problema non omogeneo

$$\begin{cases} \Box u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u = g, u_t = h & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases};$$

cioè, $u(x,t) := \int_0^t u(x,t;s)\, ds$ con $\{u(\cdot;s)\}_{s\in(0,t]}$ la famiglia di soluzioni dei problemi

$$\begin{cases} \Box u(\cdot,\cdot;s) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (s,+\infty) \\ u(\cdot,s;s) = 0,\ u_t(\cdot,s;s) = f(\cdot,s). \end{cases}$$

2.4.3 Metodi di energia

Per ottenere risultati di unicità o di dipendenza continua dai dati nel caso dell'equazione di Laplace e di quella del calore avevamo fatto uso di principi di massimo. Nel caso dell'equazione delle onde esistono ancora dei principi di massimo un pò particolari. Ad ogni modo, è più comune usare i cosidetto *metodo di integrali di energia*. Tale tecnica funziona anche con le altre equazioni (v. gli esercizi proposti per il corso ed il testo Evans [5]).

Teorema 2.4.2 (Conservazione di energia)**.** *Sia* $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ *una soluzione di*

$$\begin{cases} \text{(W)} & \Box u = u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) \\ \text{(IC)} & u(x,0) = g(x), \;\; u_t(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

con dati iniziali g, h *a supporto compatto in* $\mathbb{R}^n$*. Allora* $E'(t) = 0$ *per ogni* $t > 0$*, ovvero* $E(t) = E(0)$ *per ogni* $t \geq 0$*.*

Dimostrazione. 1. Si moltiplica (W) per u_t per trovare l'identità differenziale [18]

$$(*) \qquad 0 = \frac{1}{2}\mathrm{div}\left(-2u_t D_x u, u_t^2 + |D_x u|^2\right).$$

Infatti,

$$\begin{aligned} 0 &= u_t \mathrm{div}\,(-D_x u, u_t) = \mathrm{div}\,(u_t(-D_x u), u_t^2) - D(u_t)\cdot(-D_x u, u_t) \\ &= \mathrm{div}\,(u_t(-D_x u), u_t^2) + \sum_{j=1}^n u_{tx_j} u_{x_j} - u_t u_{tt} = \mathrm{div}\,(u_t(-D_x u), u_t^2) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2}\left(u_{x_j}^2\right)_t - \frac{1}{2}(u_t^2)_t \end{aligned}$$

2. Poi, si integra l'identità (*) su una palla opportuna in $\mathbb{R}^n$ con $t \in (0,+\infty)$ fisso. Più precisamente:

   - Sia $R > 0$ t.c. $\mathrm{supp}(g) \cup \mathrm{supp}(h) \subset B_R(0) \subset\subset \mathbb{R}^n$. Per la velocità finita di propagazione, si ha

     $$\mathrm{supp}(u(\cdot,t)) \subset B_{R+t}(0), \quad \forall\, t \in [0,+\infty),$$

     (v. anche Cor. 2.4.2 sotto).

   - Integriamo (*) su questa palla

     $$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\int_{B_{R+t}(0)} \left(u_t^2 + |D_x u|^2\right)_t \, dx - \int_{B_{R+t}(0)} \mathrm{div}_x\,(u_t D_x u)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(u_t^2 + |D_x u|^2\right)_t \, dx - \int_{\partial B_{R+t}(0)} u_t D_x u \cdot \nu \, dS_{R+t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(u_t^2 + |D_x u|^2\right) dx\right] - 0 = E'(t). \end{aligned}$$

[18] Qui div = $\mathrm{div}_{x,t}$ è la divergenza totale nello spazio-tempo $\mathbb{R}^n \times R$.

È stato usato il fatto che $E \in C^1([0,+\infty)$ e si può derivare sotto il segno di integrale. Infatti, per ogni $t^* > 0$, consideriamo l'intervallo $I = (t^*/2, 2t^*)$. Il caso $t^* = 0$ è analogo. L'energia è una funzione integrale $E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e(x,t)\,dx$ dove $e(x,t) := (u_t^2 + |D_x u|^2)/2$ soddisfa

$$e(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad e(\cdot,t) \in C^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{per ogni } t \in I$$

e per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times I$:

$$|e_t(x,t)| \leq \sup_{(x,t)\in B_{R+2t^*}(0)\times I} |e_t(x,t)|\ \chi_{B_{R+2t^*}(0)} \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Usando il teorema sulla convergenza dominata di Lebesgue, si ottiene $E \in C^1(I)$ ed il passagio della derivata in t sotto il segno di integrale.

□

Osservazione 2.4.5. L'ipotesi g e h a supporto compatto viene usata per evitare questioni delicate sulle convergenze degli integrali in gioco. Si potrebbe fare di meglio. Ad esempio, consideriamo una soluzione u di (W) con $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ e di *energia finita*, cioè

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(u_t^2 + |D_x u|^2\right) dx < +\infty, \quad \forall\, t \in [0,+\infty).$$

Dalla condizione di energia finita, si ricava l'affermazione[19]: per ogni $t \geq 0$ fissato esiste una successione di raggi $R_k = R_k(t)$ t.c.

$$\int_{\partial B_{R_k}(0)} \left(u_t^2 + |D_x u|^2\right) dx \to 0^+ \quad \text{per } k \to +\infty.$$

Integrando poi (*) lungo questa successione di palle, si ottiene

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2}\int_{B_{r_k}(0)} \left(u_t^2 + |D_x u|^2\right)_t dx \to 0, \quad \text{per } k \to +\infty.$$

Questa affermazione suggerisce che l'energia dovrebbe essere conservata per soluzioni regolari con energia finita. Però non costituisce ancora una dimostrazione. Un'altra strategia potrebbe essere di approssimare g, h con funzioni a supporto compatto e passare al limite.

Corollario 2.4.1 (Unicità per il problema di Cauchy)**.** *Siano $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $h \in C^1(\mathbb{R}^n)$ con g, h a supporto compatto. Esiste al più una soluzione $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \Box u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u = g, u_t = h & \text{su } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

[19] Si usa Fubini per le bucce ed il fatto che $f \geq 0$ e sommabile su $(0,+\infty)$ implica $\liminf_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (Analisi IV)

Dimostrazione. Consideriamo $u = u_1 - u_2$ la differenza di due soluzioni. Per la linearità u è soluzione regolare con dati iniziali $g = 0 = h$ a supporto compatto. Quindi

$$\forall\, t > 0 : \;\; 0 = E(0) = E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(u_t^2 + |D_x u|^2\right) dx.$$

Segue che $Du \equiv 0$ su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ connesso e quindi $u \equiv$ costante, ma $u(x,0) = 0$. □

Lo stesso tipo di argomentazione funziona anche per il Problema di Cauchy-Dirichlet su domini limitati nello spazio.

Teorema 2.4.3. *Siano $U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitato e $T > 0$. Esiste al più una soluzione $u \in C^2(\overline{U}_T)$ del problema di Cauchy-Dirichlet*

$$\begin{cases} \Box u = f & \text{in } \; U_T = U \times (0,T] \\ u = g & \text{su } \Gamma_T = \overline{U}_T \setminus U_T \\ u_t = h & \text{su } U \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Dimostrazione. Consideriamo la differenza $u = u_1 - u_2$ di due soluzioni e fissiamo $t_0 \in (0,T]$. Integriamo l'identità (*) su U_{t_0} e usiamo il Teorema della divergenza per trovare

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\int_{\partial \overline{U}_{t_0}} \left(-2u_t D_x u, u_t^2 + |D_x u|^2\right) \cdot \nu \, dS \\ &= -E(0) + E(t_0) - \int_{\partial U \times [0,t_0]} u_t D_x u \cdot \nu_x \, dS, \end{aligned}$$

dove $\nu = (\nu_x, \nu_t)$. Poiché i dati sono nulli, abbiamo $E(0) = 0$ e $u_t = 0$ su $\partial U \times [0,t_0]$. Quindi abbiamo $Du = 0$ su ogni sezione $U \times \{t = t_0\}$. Essendo $t \in (0,T]$ arbitrario, otteniamo $u \equiv$ costante in $\overline{U}_T$ ma $u = 0$ su Γ_T. □

Localizzando l'energia su un cono opportuno, otteniamo il segneute risultato.

Teorema 2.4.4 (Dominio di dipendenza)**.** *Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 > 0$ e*

$$\Sigma = \Sigma(x_0,t_0) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \; 0 \le t \le t_0, \; |x - x_0| \le t_0 - t\}.$$

Se $u \in C^2(\Sigma)$ è soluzione di

$$\begin{cases} \Box u = 0 & \text{in } \Sigma^\circ \\ u = u_t = 0 & \text{su } \Sigma \cap \{t = 0\} \end{cases}$$

allora $u \equiv 0$ in Σ.

Dimostrazione. Si integra (*) sul cono troncato $\Sigma_T = \Sigma \cap \{0 \le t \le T\}$ per trovare

$$E(u; B_T) \le E(u; B_0) \;\; \forall\, T \in (0, t_0),$$

dove $B_T := \Sigma_T \cap \{t = T\}$ e

$$E(u; B_T) := \frac{1}{2} \int_{B_T} \left(u_t^2 + |D_x u|^2 \right) dx.$$

Ma $E(u, B_0) = 0$ e, quindi $E(u, B_T) = 0$ per ogni $T \in (0, t_0)$. □

Corollario 2.4.2 (Velocità finita di propagazione)**.** *Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ una soluzione di*

$$\begin{cases} \text{(W)} & \Box u = u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ \text{(IC)} & u(x, 0) = g(x), \;\; u_t(x, 0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

con dati iniziali g, h a supporto compatto in $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Allora per ogni $t \geq 0$ si ha

$$\text{supp}(u(\cdot, t)) \subset B_{R+t}(0), \quad \forall\, t \in [0, +\infty).$$

Dimostrazione. È immediata usando Teo. 2.4.4. □

Osservazione 2.4.6. Il metodo di energia è molto generale e consiste in:

1. moltiplicare la PDE per una quantità $M(u)$ opportuna;
2. integrare il risultato su un'insieme opportuno;
3. manipolare gli integali tramite IPP/TdD per trovare un'identità oppure una disuguaglianza utile (usando eventualmente (IC), (BC) etc).

Domanda: Quali sono delle buone scelte per $M(u)$?
Risposta: Generatori infinitesimali di invarianze della PDE. Ad esempio,

- u_t per (W) - traslazione in t;
- u per (L) e (H) - l'equazione è lineare.

2.5 Commenti finali

Fino ad ora, abbiamo trattato solo esempi particolari di *equazioni lineari del primo e del secondo ordine*; cioè del tipo

$$\text{(LPDE)} \quad Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_{ij} u + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) D_i u + c(x) u = f(x),$$

dove $N = n$ e $x = (x_1, \ldots, x_n)$ oppure $N = n + 1$ e $x = (x_1, \ldots, x_n, t)$. Senza perdità di generalità possiamo assumere che $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j = 1, \ldots, N$.
Domanda 1: In che modo possiamo dividere una classe di PDE in *tipi qualitativi*? Ad esempio, per le PDE lineari del secondo ordine?

Definizione 2.5.1. Sia $A(x) = \left[a_{ij}(x)\right]_{N\times N}$ la matrice dei coefficienti principali dell'operatore L di (LDPE). Posti $\{\lambda_1(x), \dots \lambda_N(x)\}$ gli autovalori di $A(x)$, (LPDE) si dice:

a) *ellittica in x* se tutti gli autovalori $\lambda_i(x)$ sono non nulli e hanno lo stesso segno (cioè $A(x)$ è definita positiva/negativa);

b) *iperbolica in x* se tutti gli autovalori $\lambda_i(x)$ sono non nulli e uno ha segno opposto rispetto agli altri (cioè $A(x)$ è indefinita con segnatura $N-1$ o $1-N$);

c) parabolica in x se un autovalore $\lambda_i(x)$ è nullo e gli altri autovalori hanno lo stesso segno (cioè $A(x)$ è semi-definita positiva/negativa con un autovalore nullo).

Un'equazione viene detta *ellittica in $U \subset \mathbb{R}^N$* se è ellitica in ogni punto $x \in U$, etc.

Esempio 2.5.1. Si vede subito che:

- l'equazione di Laplace è ellittica in $\mathbb{R}^n$ ($\lambda_i = 1$ per ogni i);
- l'equazione delle onde è iperbolica in $\mathbb{R}^{n+1}$ ($\lambda_i = -1$ per $i = 1, \dots, n$ e $\lambda_{n+1} = 1$);
- l'equazione del calore è parabolica in $\mathbb{R}^{n+1}$ ($\lambda_i = -1$ per $i = 1, \dots, n$ e $\lambda_{n+1} = 0$).

Osservazione 2.5.1. In dimensione $N = 2$, si può mostrare che ogni equazione lineare del secondo ordine fa parte di esattamente uno dei tre tipi qualitativi in ogni suo punto. In dimensione superiore non è così, come si vede dalla definizione stessa riguardo al numero di autovalori nulli e i segni degli altri.

Per altre classi di equazioni (ordine superiore oppure nonlineari) non esiste una classificazione completa. Per averne un'idea, osserviamo alcune definizioni usate per le equazioni ellittiche.

Definizione 2.5.2. Un operatore differenziale lineare di ordine $m \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{R}^N$, cioè $P(x, D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ è detto *ellittico in x* se esiste $\lambda = \lambda(x) > 0$ (costante di ellitticità) t.c.

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \ge \lambda|\xi|^m,$$

oppure la stessa cosa con $-p_m$ al posto di p_m. In particolare, $p_m(x, \xi) \neq 0$ per ogni $\xi \neq 0$.

Definizione 2.5.3. Un' equazione completamente non lineare del secondo ordine, cioè della forma $F(x, u, Du, D^2u) = 0$ con $F = F(x, z, p, q)$ è detta ellittica (per u) in x se la matrice

$$M(x) := D_q F(x, u(x), Du(x), D^2u(x))$$

è una matrice definita (positiva/negativa).

Come esercizio, si può controllare che un'equazione lineare del secondo ordine è ellittica secondo la Definizione 2.5.2 se e solo se è ellittica secondo la Definizione 2.5.3. Si possono consultare gli esercizi proposti per altri esempi.

Domanda 2: Quale sono le possibili tecnhiche per trattare le PDE?
Risposta: Tra le più comuni:

1. Principi di massimo/minimo: molto utili per equazioni ellittiche e paraboliche; meno utile per equazioni iperboliche;
2. Metodi di energia: utili per tutti i tipi;
3. Analisi di Fourier: utile soprattutto per equazioni lineari;
4. Metodi variazionali: fra un'attimo diremo qualcosa.

N.B. In tutti i casi, è necessaria un po' di Analisi Funzionale per determinare spazi opportuni in cui ambientare il problema. Una scelta opportuna è evidente se consideriamo il metodo 4.

Teorema 2.5.1 (Principio di Dirichlet)**.** *Sia $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio limitato. Sia u minimo del funzionale di Dirichlet*

$$E(u) = \min_{w \in \mathcal{F}_\varphi} E(w)$$

dove

$$E(w) = \int_\Omega |Dw|^2 \, dx \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_\varphi = \{w \in C^2(\Omega) : \ w_{|\partial\Omega} = \varphi\}.$$

Allora u è soluzione classica del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Dimostrazione. 1. La condizione al contorno è soddisfata in quanto $u \in \mathcal{F}_\varphi$.

2. Sia $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ una *funzione test*. Allora $u + t\eta \in \mathcal{F}_\varphi$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e si ha

$$J(t) := E(u + t\eta) \geq E(u) = J(0)$$

dove J è derivabile in $t = 0$ (esercizio). Per il Teorema di Fermat $J'(0) = 0$.

3. Calcolando si trova

$$\begin{aligned} J(t) &= \int_\Omega \langle Du + tD\eta, Du + tD\eta \rangle \, dx \\ &= \int_\Omega \left(|Du|^2 + 2t\langle Du, D\eta \rangle + t^2 |D\eta|^2 \right) dx \\ &= J(0) + tJ'(0) + o(t) \ \text{ per } t \to 0. \end{aligned}$$

Ma $J'(0) = 0$. Quindi

$$\int_\Omega \langle Du, D\eta \rangle \, dx = 0 \quad \forall\, \eta \in C_0^\infty(\Omega).$$

4. Usando il teorema della divergenza

$$-\int_\Omega \eta \Delta u \, dx = 0 \quad \forall\, \eta \in C_0^\infty(\Omega),$$

e per il teorema di annullamento (Analisi Reale) abbiamo $\Delta u = 0$ in Ω.

□

Bene. **Se** esiste $\min_{w \in \mathcal{F}_\varphi} E(w)$ allora u è soluzione classica del nostro problema. Ma esiste il minimo?

1. $E(w) \geq 0$ per ogni $w \in \mathcal{F}_\varphi$, quindi esiste $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_\varphi$ t.c.

$$E(u_k) \to m := \inf_{\mathcal{F}_\varphi} E \quad \text{(successione minimizzante)}$$

2. Abbiamo $u_k \to u$? Chi è u? In quale spazio vive? In che senso converge?

Questo è un **vero** problema. (Dirichlet stesso era caduto nella trappola).

Esempio 2.5.2. (Weierstrass) Consideriamo

$$E(u) = \int_0^1 x^2 |u'(x)|^2 \, dx \quad \text{su} \quad \mathcal{F} = \{u \in C^1_{\text{pw}}([0,1]) \cap C^0([0,1]) : \ u(0) = 0, u(1) = 1\}.$$

Affermiamo che $\inf_{\mathcal{F}} E$ **non** viene assunto. Infatti:

1. $\inf_{\mathcal{F}} E = 0$: Dato che $E \geq 0$, basta trovare una successione $\{u_k\} \subset \mathcal{F}$ t.c. $E(u_k) \to 0$. Una è data da

$$u_k(x) = \begin{cases} kx & 0 \leq x \leq 1/k \\ 1 & 1/k \leq x \leq 1 \end{cases} \implies u_k'(x) = \begin{cases} k & 0 \leq x < 1/k \\ 0 & 1/k < x \leq 1 \end{cases}$$

Quindi $E(u_k) = \int_0^{1/k} x^2 k^2 \, dx = 1/(3k) \to 0$ per $k \to +\infty$ e abbiamo una successione minimizzante.

2. D'altre parte,

$$u_k(x) \to \begin{cases} 1 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \notin \mathcal{F} \subset C^0([0,1]);$$

cioè la scelta di $\mathcal{F}$ è sbagliata.

Domanda: Quali spazi $\mathcal{F}$ vanno bene per il problema di minimizzazione

$$\min_{\mathcal{F}} \int_\Omega |Du|^2\,dx?$$

Sia $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ t.c. $u_k = \varphi$ su $\partial\Omega$ e $E(u_k) \to m = \inf_{\mathcal{F}} E$.

1. **Lemma:** *E è convesso, cioè*

$$E(tu + (1-t)v) \le tE(u) + (1-t)E(v), \quad \forall\, u, v \in \mathcal{F}, \ \ \forall\, t \in [0,1].$$

Dimostrazione.

$$E(tu + (1-t)v) = \int_\Omega |tDu + (1-t)Dv|^2\ dx$$

ma $|tDu + (1-t)Dv| \le t|Du| + (1-t)|Dv|$ e quindi

$$|tDu + (1-t)Dv|^2 \le (t|Du| + (1-t)|Dv|)^2 \le t|Du|^2 + (1-t)|Dv|^2,$$

dove si è usata la convessità della funzione $s \mapsto s^2$ su $[0, +\infty)$. Integrando su Ω si ottiene la tesi. □

2. **Lemma:** $E(u_k - u_j) \to 0$ per $j, k \to +\infty$

Dimostrazione. Abbiamo $|V - W|^2 = 2|V|^2 + 2|W|^2 - |V + W|^2$ per ogni $V, W \in \mathbb{R}^n$. Quindi

$$\begin{aligned} E(u_k - u_j) &= \int_\Omega |Du_k - Du_j|^2\,dx = 2\int_\Omega |Du_k|^2\,dx + 2\int_\Omega |Du_j|^2\,dx - 4\int_\Omega \left|\frac{|Du_k|^2}{2}\right|^2\,dx \\ &= 2E(u_k) + 2E(u_j) - 4E\Big(\frac{u_k + u_j}{2}\Big) \\ &\to 2m + 2m - 4m = 0 \quad \text{per } j, k \to +\infty. \end{aligned}$$

Infatti, dal Lemma 1

$$m \le E\Big(\frac{u_k + u_j}{2}\Big) \le \frac{1}{2}E(u_k) + \frac{1}{2}E(u_j) \to m,$$

supponendo che $\mathcal{F}$ sia uno *spazio vettoriale*. La media di u_k e u_j soddisfa (BC). □

3. Quindi, ogni succcessione minimimizzante deve soddisfare

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \Big[D_i u_k - D_i u_j\Big]^2\ dx = \int_\Omega \Big|Du_k - Du_j\Big|^2\ dx \to 0;$$

cioè $\{D_i u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy per la norma $L^2(\Omega)$ per ogni $i = 1, \dots n$. Ma $L^2(\Omega)$ è completo, quindi

$$\exists\, w_1, \dots, w_n \in L^2(\Omega) \ \text{ t.c. } \ D_i u_k \to w_i \ \text{ in } L^2(\Omega) \ \ i = 1, \dots n.$$

4. Ci serve $w_i = D_i u$ in $L^2(\Omega)$ per qualche $u = \lim_{k\to+\infty} u_k$ in $\mathcal{F}$. Questo ci porta a considerare

$$\{u \in L^2(\Omega) : \exists \text{“}D_i u\text{”} \in L^2(\Omega)\} = W^{1,2}(\Omega) = \mathcal{F},$$

dove “$D_i u$” è la derivata debole e $W^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Sobolev.

Capitolo 3

Spazi di Sobolev

Seguiamo sostanzialmente Evans [5], ma a volte usando qualche idea di Adams [1], Brezis [3] e Giusti [7].

3.1 Derivate deboli

L'idea: Vogliamo definire derivate in senso debole di u "scaricando" le derivate su una *funzione test* φ. Più precisamente, siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(\varphi) \subset\subset \Omega\}$ dove $\text{supp}(\varphi)$ è il supporto di φ.[1]

- Se $u \in C^1(\Omega)$ abbiamo via IPP[2]

$$\int_\Omega D_i u\, \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega u\, D_i \varphi\, dx, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

- Se $u \in C^k(\Omega)$ e $|\alpha| = k \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$\int_\Omega D^\alpha u\, \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\, D^\alpha \varphi\, dx, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.1.1}$$

- La formula (3.1.1) ha senso se $u, D^\alpha u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, **ma** data $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, non sarà vero che $D^\alpha u$ esiste come limite del rapporto incrementale, cioè non esiste la derivata in senso classico. Invece diremo che u è derivabile in senso debole, **se** esiste $v_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ che rende (3.1.1) vera con v_α al posto di $D^\alpha u$.

Definizione 3.1.1. Siano $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Diciamo che u *ammette derivata debole* α*-esima in* Ω se esiste $v_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ t.c.

$$\int_\Omega v_\alpha\, \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u\, D^\alpha \varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

[1] La chiusura in Ω di $\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$.

[2] Il termine al bordo è nullo perchè $\varphi \equiv 0$ in un intorno di ogni $x \in \partial\Omega$.

In tal caso, v_α è detta la *derivata debole α-esima di u in* Ω e usiamo i simboli $D^\alpha u$ o $D^\alpha_w u$ per v_α.[3] Inoltre, se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ammette derivata debole $D^\alpha u$ in Ω per ogni $|\alpha| \le k$, diciamo che u è *k volte differenziabile debolmente in* Ω.

Osservazione 3.1.1. Per $|\alpha| = 1$, abbiamo il *gradiente debole* $Du \in \left(L^1_{\text{loc}}(\Omega)\right)^n$ se esiste $(v_1, \dots, v_n) \in \left(L^1_{\text{loc}}(\Omega)\right)^n$ t.c.

$$\int_\Omega v_i \, \varphi \, dx = -\int_\Omega u \, D_i \varphi \, dx \quad \forall \, \varphi \in C^\infty_0(\Omega).$$

e denotiamo $v_i = D_i u = (D_i)_w u$.

Per farci un'idea, consideriamo qualche esempio 1-dimensionale,.

Esempio 3.1.1. Sia $u = |x|$ in $\Omega = (-1, 1)$. Esiste u' debole in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$? La questione ha senso perchè $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Facendo i conti si trova

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 u(x)\varphi'(x)\,dx &= -\int_{-1}^0 x\varphi'(x)\,dx + \int_0^1 x\varphi'(x)\,dx \\
&= -x\varphi\Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \varphi(x)\,dx + x\varphi\Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)\,dx \\
&= -\int_0^1 \text{sign}(x)\varphi(x),\, dx.
\end{aligned}$$

Quindi esiste la derivata debole ed è $u'_w = \text{sign}(x)$.

Esempio 3.1.2. Sia $u = \text{sign}(x)$ in $\Omega = (-1, 1)$. Esiste u' debole in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$? Di nuovo $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 u(x)\varphi'(x)\,dx &= -\int_{-1}^0 \varphi'(x)\,dx + \int_0^1 \varphi'(x)\,dx \\
&= -\varphi(0) - \varphi(0) = -2\varphi(0).
\end{aligned}$$

Ma dall'Analisi Reale, sappiamo che $\nexists \, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ t.c.

$$-\int_{-1}^1 v\varphi \, dx = -2\varphi(0) \quad \forall \varphi \in C^\infty_0(\Omega).$$

Quindi non esiste una derivata debole $u'_w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Esiste invece la derivata nel senso delle distribuzioni $u' = -2\delta$.

Facciamo qualche commento sul concetto di derivata debole e poi esaminiamone le prime proprtietà.

[3] Ovviamente con la notazione $D^\alpha_w u$ evitiamo confusione con la derivata in senso classico, ma spesso usiamo derivate deboli come strumento per arrivare alle derivate classiche.

Osservazione 3.1.2. La derivata debole $D^\alpha u$ è stata definita globalmente in Ω, ma possiamo localizzare la definizione nel modo seguente. Data $B_\epsilon(x_0) \subset \Omega$ chiediamo solo che *esiste $D^\alpha u$ debole in $B_\epsilon(x_0)$*; cioè esiste $v_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(B_\epsilon(x_0))$ t.c.

$$\int_{B_\epsilon(x_0)} v_\alpha \, \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{B_\epsilon(x_0)} u \, D^\alpha \varphi \, dx \quad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(B_\epsilon(x_0)).$$

Notiamo che se esiste $D^\alpha u$ debole in Ω, allora esiste $D^\alpha u$ debole in $B_\epsilon(x_0)$ per ogni $B_\epsilon(x_0) \subset \Omega$.

Osservazione 3.1.3. La derivata debole $D^\alpha u$ viene definita in modo diretto anzichè in modo induttivo, ovvero come $D_i(D^\beta u)$ con $|\beta| = |\alpha| - 1$. Anzi, data l'esistenza di $D^\alpha u$ debole con $|\alpha| \geq 2$, non è detto che esistano le derivate deboli di ordine inferiore.

Esempio 3.1.3. Sia $u(x_1, x_2) = \text{sign}(x_1) + \text{sign}(x_2) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ con $\Omega = (-1, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Allora

i) $\nexists \, D_1 u, D_2 u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$;

ii) $D_{12} u = 0 = D_{21} u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Infatti, l'affermazione i) segue dallo stesso ragionamento usato nell'Esempio 3.1.2. Invece, per $D_{12} u$ si trova

$$\begin{aligned} \int_\Omega u \, D_{12}\varphi \, dx &= 2 \int_0^1 \left(\int_0^1 D_{12}\varphi \, dx_1 \right) dx_2 - 2 \int_{-1}^0 \left(\int_{-1}^0 D_{12}\varphi \, dx_1 \right) dx_2 \\ &= 2 \int_0^1 \left[-D_2\varphi(0, x_2) \right] dx_2 - 2 \int_{-1}^0 D_2\varphi(0, x_2) \, dx_2 \\ &= 2\varphi(0,0) - 2\varphi(0,0) = 0. \end{aligned}$$

Lo stesso ragionamento funziona per $D_{21} u$.

Teorema 3.1.1 (Proprietà delle derivate deboli)**.** *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.*

a) Se $v_\alpha = D^\alpha_w u$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\tilde{u} = u$ q.o. in Ω, allora $v_\alpha = D^\alpha_w \tilde{u}$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

b) Se $v_1, v_2 = D^\alpha_w u$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ allora $v_1 = v_2$ q.o. in Ω.

c) Se $u \in C^k(\Omega)$ allora $D^\alpha_w u = D^\alpha u$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ per ogni $|\alpha| \leq k$.

Cioè, data una funzione u definita q.o. in Ω, misurabile e sommabile, l'esistenza di una derivata debole $D^\alpha u$ è indipendente dal rappresentante della classe di equivalenza di $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Inoltre, la derivata debole di u è unica (determina un'unica classe di equivalenza in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ rispetto la solita relazione di equivalenza) e se $u \in C^k(\Omega)$, allora la derivata debole di u ha la derivata classica come rappresentante.

Dimostrazione. La parte a) segue dalla definizione di derivata debole e dall'uguaglianza q.o. tra u e $\tilde{u}$:

$$\int_\Omega v_\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \, D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \tilde{u} \, D^\alpha \varphi \, dx$$

Per le parti b) e c), ricordiamo il teorema di annullamento di Analisi Reale[4]: *Per* $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$

$$\int_\Omega f\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \Rightarrow \quad f = 0 \text{ q.o. in } \Omega.$$

Infatti:

b) Usando la definizione della derivata debole abbiamo

$$\int_\Omega v_1 \varphi dx = (-1)^\alpha \int_\Omega u \, D^\alpha \varphi \, dx = \int_\Omega v_2 \varphi dx, \quad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega (v_1 - v_2)\varphi \, dx = 0 \quad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Quindi, applicando il teorema di annullamento, otteniamo il risultato.

c) Usando la definizione di derivata debole ed IPP abbiamo

$$\int_\Omega D^\alpha_w u \, \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \, D^\alpha \varphi \, dx = \int_\Omega D^\alpha u \, \varphi \, dx, \quad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Da cui il risultato per il teorema di annulamento.

□

Osservazione 3.1.4. Nell'affermazione c) sopra, la condizione $u \in C^k(\Omega)$ è essenziale. Cioè, esistono delle funzioni derivabili in senso classico (con derivate non continue) per cui non esiste la derivata debole.

Esempio 3.1.4. Sia $u : \Omega = (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definita da

$$u(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

u è derivabile in senso classico con derivata

$$u'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ma $u' \notin L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Quindi la derivata debole non esiste.

Proponiamo ora un paio di esercizi legati alle Osservazioni 3.1.3 e 3.1.4.

[4]Il risultato è una conseguenza del Teorema di Differenziazione di Lebesgue.

Esercizio 3.1.1. Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Dall'Analisi Reale sappiamo che la funzione integrale $F_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ definisce una funzione assolutamente continua in $[a,b]$ per ogni $b > a$ ed è perciò differenziabile quasi ovunque con derivata $F_a' = f \in L^1([a,b])$. Mostrare: $\forall\, a \in \mathbb{R}$, esiste la derivata debole $(F_a)'_w \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Esercizio 3.1.2. Sia $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Mostrare le sequenti affermazioni:

a) $\exists\, v_{12} = D_{12}u$ debole $\;\Leftrightarrow\;$ $\exists\, v_{21} = D_{21}u$ debole;

b) Se $\exists\, v_{12} = D_{12}u$ debole , allora $v_{21} = v_{12}$ q.o. in Ω.

Concludiamo con un paio di osservazioni per motivare i prossimi discorsi.

Osservazione 3.1.5. Il concetto di derivata debole fornisce *formulazioni deboli di una (PDE)*; ad esempio, si può dire che $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *debolmente armonica in* Ω se è due volte debolmente differenziabile in Ω e soddisfa

$$\int_\Omega u\,\Delta\varphi\,dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.1.2}$$

Infatti, se esistono le derivate deboli $D_{ii}u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ per ogni $i = 1,\dots n$, la (3.1.2) ci dice esattamente che il *Laplaciano debole* è nullo.

Esercizio 3.1.3. Siano $L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_{ij}$ con $a_{ij} = a_{ji} \in C^\infty(\Omega)$ e $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ due volte debolmente differenziabile in Ω. Formulare una definizione per $Lu = 0$ *debolmente in* Ω.

Osservazione 3.1.6. Data una derivata debole $D^\alpha u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ di $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, ha senso chiedere inoltre che:

$$u \in L^p(\Omega) \quad \text{e} \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \text{per } p \in [1, +\infty].$$

Questo ci porterà agli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$.

3.2 Gli spazi $W^{k,p}(\Omega)$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto.

Definizione 3.2.1. Siano $k \in \mathbb{N}_0$ e $1 \le p \le \infty$. Si definisce lo *spazio di Sobolev*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \;:\; \exists \text{ derivata debole } D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ per ogni } |\alpha| \le k\},$$

Osservazione 3.2.1. Per $k = 0$ abbiamo $W^{k,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Dall'Analisi Reale sappiamo che si tratta di uno *spazio di Banach* per ogni $p \in [1,\infty]$. Lo spazio è inoltre *riflessivo*[5] per $p \in (1,\infty)$ ed è separabile[6] per $p \in [1,\infty)$.

[5] $\mathcal{B}$ è *riflessivo* se il biduale $\mathcal{B}''$ è isomorfo a $\mathcal{B}$.

[6] $\mathcal{B}$ è *separabile* se $\mathcal{B}$ ammette un sottoinsieme numerabile e denso.

Osservazione 3.2.2. Per $k = 1$ abbiamo

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \ : \ \exists \text{ gradiente debole } Du \in (L^p(\Omega))^n \right\},$$

cioè $\exists\, (v_1, \dots, v_n) \in (L^p(\Omega))^n$ t.c.

$$\int_\Omega v_i \, \varphi \, dx = - \int_\Omega u \, D_i \varphi \, dx, \quad \forall \, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Abbiamo così la seguente identificazione:

$$\begin{array}{ccc} W^{1,p}(\Omega) & \leftrightarrow & W \subsetneq (L^p(\Omega))^{n+1} \\ u & \mapsto & (u, Du) \end{array}$$

Dal Teorema 3.1.1, segue che la mappa sopra è iniettiva; un elemento u di $W^{k,p}(\Omega)$ è una classe di equivalenza, dove la classe di $Du \in (L^p(\Omega))^n$ è determinata dalla classe di u in $L^p(\Omega)$ se u ammette gradiente debole. D'altra parte la mappa sopra **non** è suriettiva, perchè esistono $u \in L^p(\Omega)$ senza gradiente debole o con gradiente debole $Du \in \left(L^1_{\text{loc}}(\Omega)\right)^n$ ma $Du \notin (L^p(\Omega))^n$.

Teorema 3.2.1 (Prime proprietà)**.** *Siano $1 \le p \le \infty$ e $k \in \mathbb{N}_0$. Allora:*

a) $W^{k,p}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale.

b) $W^{k+m,p}(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega)$ per ogni $m \in \mathbb{N}_0$.

c) Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ allora $u|_{\Omega'} \in W^{k,p}(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subseteq \Omega$ aperto.

d) Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ allora $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$ e vale la formula di Leibniz

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta \, D^{\alpha-\beta} u$$

dove le derivate di ζu e u sono derivate deboli.

Dimostrazione. Per la parte a), sfruttiamo il fatto che $L^p(\Omega)$ è uno spazio vettoriale. Siano $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora $\lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v \in L^p(\Omega)$ per ogni $|\alpha| \le k$. Quindi basta mostrare che $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$. Ma questo è facile: per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v) \, \varphi \, dx &= \lambda \int_\Omega D^\alpha u \, \varphi \, dx + \mu \int_\Omega D^\alpha v \varphi \, dx \\ &= \lambda (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \, D^\alpha \varphi \, dx + \mu (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \, D^\alpha \varphi \, dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (\lambda u + \mu v) \, D^\alpha \varphi \, dx. \end{aligned}$$

La parte b) è facile da dimostrare usando il fatto che $u \in W^{k,p}(\Omega) \Rightarrow D^\beta u \in W^{k-|\beta|,p}(\Omega)$ per ogni $|\beta| \le k$. Lasciamo le parti c) e d) per esercizio (v. Teorema 5.2.1 di Evans [5]). □

Definizione 3.2.2. Sia $W^{k,p}(\Omega)$ con $k \in \mathbb{N}_0$ e $p \in [1, +\infty]$. La *norma* $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ è definita da

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}} & 1 \le p < \infty \\ \max_{|\alpha| \le k} \left(\operatorname*{ess\,sup}_\Omega |D^\alpha u| \right) & p = \infty \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Per calcolare le norme, si può scegliere un qualsiasi rappresentante per

$$(u, Du, \dots, D^k u) \in L^p(\Omega) \times (L^p(\Omega))^n \cdots (L^p(\Omega))^{n^k}.$$

Esercizio 3.2.1. Verificare le tre proprietà di norma per i funzionali (3.2.1) (v. Teorema 2 su p. 249 di [5]).

Esercizio 3.2.2. Per $1 \le p < \infty$, notando che

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

verificare che la norma (3.2.1) è equivalente a

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Esercizio 3.2.3. Mostrare che vale l'inclusione $C^k(\overline{\Omega}) \subset W^{k,p}(\Omega)$ per $p \in [1, \infty]$ e $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$.

Esercizio 3.2.4. In funzione della dimensione n, trovare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p \in [1, \infty]$ per cui

$$|x|^{-\alpha} \in W^{k,p}(B_1(0)) \quad \text{e} \quad |x|^{-\alpha} \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)).$$

Teorema 3.2.2 (Spazi di Sobolev come spazi funzionali)**.** *Per ogni $k \in \mathbb{N}_0$, lo spazio $W^{k,p}(\Omega)$*

a) è uno spazio di Banach per ogni $1 \le p \le \infty$;

b) è riflessivo per ogni $1 < p < \infty$;

c) è separabile per ogni $1 \le p < \infty$;

d) è uno spazio di Hilbert per $p = 2$ con prodotto scalare

$$(u, v)_{W^{k,2}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha u \, D^\alpha v \, dx = \sum_{|\alpha| \le k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

In questo caso, si denota $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$.

Dimostrazione. Mostriamo solo il caso $k = 1$. I casi $k \geq 2$ sono analoghi - v. Teo. 5.2.2 di Evans [5].

a) Sappiamo già che $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale normato, dunque ci rimane solo da mostrarne la completezza. Prendiamo una successione $\{u_j\}$ di Cauchy in $W^{1,p}(\Omega)$. Allora evidentemente le successioni

$$\{u_j\}, \{D_1 u_j\}, \ldots, \{D_n u_j\} \text{ sono di Cauchy in } L^p(\Omega)$$

$$\Rightarrow \exists\, u, v_1, \ldots, v_n \in L^p(\Omega) \text{ t.c.}$$

$$u_j \to u \quad \text{in } L^p(\Omega) \tag{3.2.2}$$

$$D_i u_j \to v_i \quad \text{in } L^p(\Omega), \;\; i = 1, \ldots, n. \tag{3.2.3}$$

Ora ci rimane da dimostrare che:

i) esistono le derivate deboli $D_i u$ e stanno in $L^p(\Omega)$;

ii) si ha $D_i u = v_i$ in $L^p(\Omega)$.

Sia $p = [1, \infty)$. Per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e per ogni $i = 1, \ldots, n$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u D_i \varphi \, dx &= \lim_{j\to\infty} \int_\Omega u_j D_i \varphi \, dx \quad \text{(usando (3.2.2))} \\
&= \lim_{j\to\infty} \left(- \int_\Omega D_i u_j \varphi \, dx \right) \quad \text{(usando (3.2.3))} \\
&= - \int_\Omega v_i \varphi dx.
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo i) e ii).

b) Abbiamo bisogno di un pò di analisi funzionale.

- Sappiamo che $L^p(\Omega)$ è riflessivo per $1 < p < \infty$, dove il Teorema di Rappresentazione di Riesz ci dice che $[L^p(\Omega)]' \simeq L^{p'}(\Omega)$ con $p' = p/(p-1)$. È facile vedere che il prodotto cartesiano

$$E := \underbrace{L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \cdots \times L^p(\Omega)}_{n+1 \text{ fattori}}$$

è a sua volta riflessivo (Analisi Funzionale).

- La mappa $T : W^{1,p}(\Omega) \to E$ definita da $T(u) = (u, Du)$ è un'isometria fra $W^{1,p}(\Omega)$ e $W = T(W^{1,p}(\Omega)) \subset E$ dove

$$\|Tu\|_E := \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)},$$

  e si è usata la norma equivalente definita nell'Esercizio 3.2.2.

- La parte a) mostra che $T(W^{1,p}(\Omega)) \subset E$ è chiuso in E riflessivo. Dall'Analisi Funzionale allora abbiamo che anche $T(W^{1,p}(\Omega))$ è riflessivo (si trtta di un sottospazio chiuso di E). Ma T è un'isometria e quindi $W^{1,p}(\Omega)$ è riflessivo.

Per $p = 1, \infty$ non possiamo far partire il ragionamento. Comunque, l'affermazione è falsa.

c) Sappiamo che $L^p(\Omega)$ è separabile per $1 \leq p < \infty$ mentre $L^\infty(\Omega)$ non è separabile (Analisi Reale). È chiaro che E è separabile e quindi anche $T(W^{1,p}(\Omega)) \subset E$ lo è. Di nuovo, usando T isometria, abbiamo $W^{1,p}(\Omega)$ separabile.

d) È automatico.

□

Osservazione 3.2.3. Esiste un approccio alternativo per costruire gli spazi di Sobolev. Si considera il *completamento* di

$$V_{k,p} = \{u \in C^k(\Omega) : \ \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < +\infty\}$$

rispetto alla norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$. Chiamiamo $H^{k,p}(\Omega)$ tale spazio. I suoi elementi sono per definizione $u = [\{u_j\}]$ classi di equivalenza di successioni di Cauchy rispetto alla norma (come nella costruzione di $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$).

Teorema 3.2.3 (Meyers-Serrin'64)**.** *"$H = W$" per $1 \leq p < \infty$.*

Non intendiamo dimostrare il risultato. Ad ogni modo, il punto chiave della dimostrazione consiste nella verifica che le derivate deboli possono essere approssimate tramite funzioni regolari (con derivate classiche). Questo ci interessa non poco ed è legato al concetto di derivata forte di $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Diamo la definizione per funzioni in $L^p(\Omega)$.

Definizione 3.2.3. Si dice che $u \in L^p(\Omega)$ *ammette derivata forte α-esima in $L^p(\Omega)$* se esiste una successione $\{u_j\} \subset C^\infty(\Omega)$ t.c.

i) $u_j \to u$ in $L^p(\Omega)$;

ii) $\{D^\alpha u_j\}$ è di Cauchy in $L^p(\Omega)$.

In tal caso, la *derivata forte* è $D^\alpha_s u := \lim_{j\to+\infty} D^\alpha u_j$ in $L^p(\Omega)$.

Il metodo per mostrare che l'esistenza di una derivata debole implica quella forte è il solito processo di *mollificazione* visto in Analisi Reale per gli spazi $L^p(\Omega)$. È naturale allora che uno dei nostri prossimi obiettivi sarà quello di andare a trattare l'approssimazione in spazi di Sobolev.

3.3 Approssimazione in $W^{k,p}$ tramite funzioni regolari

Obiettivo: Mostrare che per ogni $u \in W^{k,p}(\Omega)$ esiste $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)\cap W^{k,p}(\Omega)$ t.c. $u_j \to u$ in norma $W^{k,p}(\Omega)$.
Metodo: Mollificazione e partizioni dell'unità rispetto ad $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

3.3.1 Approssimazione locale

Ricordiamo gli elementi della mollificazione visti in Analisi Reale (v. le dispense Payne [11] per i dettagli).

- Prendiamo un *mollificatore canonico* $\eta \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ t.c.

  i) $\eta \geq 0$

  ii) $\operatorname{supp}(\eta) \subset B_1(0)$

  iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,dx = \int_{B_1(0)} \eta(x)\,dx = 1$

  ad esempio

  $$\eta(x) := \begin{cases} Ce^{\frac{-1}{|x|^2-1}} & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

  con $C > 0$ opportuna per avere la proprietà iii).

- Definiamo la famiglia di mollificatori

  $$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

  che soddisfano i), iii) e ii)' $\operatorname{supp}(\eta_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$.

- Per $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, la *mollificata* u_ε di u è

  $$u_\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * u)(x) = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy \tag{3.3.1}$$

dove l'integranda ha supporto in $B_\varepsilon(x)$. Quindi via un cambiamento di variabili abbiamo

$$u_\varepsilon(x) = (\eta_\varepsilon * u)(x) = \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y)u(x-y)dy. \tag{3.3.2}$$

La mollificata risulta ben definita in

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Notiamo che $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^n$ se $\partial\Omega = \emptyset$, ovvero $\Omega = \mathbb{R}^n$.

N.B. Per avere $u_\varepsilon(x)$ definita per $x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, si può prolungare u e usare la (3.3.2); cioè

$$u_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y)u_0(x-y)\,dy,$$

dove $u_0 \equiv 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. In generale,[7] questa definizione crea problemi per le derivate deboli vicino a $\partial\Omega$.

Lemma 3.3.1 (Convergenze della mollificata)**.** *Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ allora:*

(i) $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ *con* $D^\alpha u_\varepsilon = D^\alpha \eta_\varepsilon * u$.

(ii) $u_\varepsilon \to u$ *q.o. in* Ω*, ovvero nei punti di Lebesgue di* Ω.

(iii) Se $u \in C^0(\Omega)$ *allora* $u_\varepsilon \to u$ *uniformemente sui compatti di* Ω.

(iv) Se $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ *con* $1 \le p < \infty$ *allora* $u_\varepsilon \to u$ *in* $L^p_{loc}(\Omega)$.

Dimostrazione. Analisi Reale. □

Lemma 3.3.2 (Mollificazione e derivate deboli)**.** *Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ per cui esiste la derivata debole $D^\alpha_w u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Allora $D^\alpha u_\varepsilon(x) = (D^\alpha_w u)_\varepsilon(x)$ per ogni $x \in \Omega_\varepsilon$. In particolare,*

$$D^\alpha(\eta_\varepsilon * u) = (D^\alpha \eta_\varepsilon) * u = \eta_\varepsilon * D^\alpha_w u \ \text{ in } \ \Omega_\varepsilon.$$

Dimostrazione. Usando il teorema sulla convergenza dominata, possiamo derivare sotto il segno di integrale e otteniamo

$$\begin{aligned} D^\alpha u_\varepsilon(x) &= D^\alpha\left(\int_\Omega \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)dy\right) = \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon^n} D^\alpha_x\left[\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]u(y)dy \\ &= \int_\Omega \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\varepsilon^n} D^\alpha_y\left[\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]u(y)dy = \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)D^\alpha_w u(y)dy \\ &= (\eta_\varepsilon * D^\alpha_w u)(x) \end{aligned}$$

Notiamo che per ogni $x \in \Omega_\varepsilon$ gli integrali non dipendono dai particolari rappresentanti per $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $v_\alpha = D^\alpha_w u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. □

[7] Invece, se $u = 0$ in qualche senso al bordo, questo prolungamento non crea problemi.

Teorema 3.3.1 (di approssimazione locale). *Sia $u \in W^{k,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$. Allora*

a) $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ per ogni $\varepsilon > 0$;

b) $u_\varepsilon \to u$ in $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$; cioè $\|u_\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} \to 0$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Dimostrazione. La parte a) segue dal Lem. 3.3.2, usando $u \in L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Per la parte b), per ogni α con $|\alpha| \leq k$ abbiamo dal Lem. 3.3.2 e dal Lem. 3.3.1:

$$D^\alpha u_\varepsilon = (D^\alpha u)_\varepsilon \to D^\alpha u \ \text{ in } L^p(\Omega'),$$

dove le mollificate sono ben definite in Ω' per ogni ε abbastanza piccolo. Quindi

$$\|u_\varepsilon - u\|^p_{W^{k,p}(\Omega')} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega')} \to 0$$

□

3.3.2 Approssimazione globale

Ora il nostro obiettivo è trovare delle funzioni regolari che approssimino un elemento di $W^{k,p}(\Omega)$ non solo localmente.

Osservazione 3.3.1. Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ha supporto compatto, abbiamo già quello che serve. Infatti, sia $\text{supp}(u) = K \subset \Omega$ con K compatto:

- $u_\varepsilon \in C^\infty_0(\Omega)$ dove $\text{supp}(u_\varepsilon) \subset K^\varepsilon := \{x \in \Omega : \ \text{dist}(x, K) \leq \varepsilon\}$.
- $K^\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$ per ogni ε piccolo.
- $\|u_\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0$ per il Teo. 3.3.1.

Quindi, per $u \in W^{k,p}(\Omega)$ generica, l'idea è quella di andare a spezzare u nellasomma di pezzi a supporto compatto via un'opportuna *partizione dell'unità*.

Lemma 3.3.3 (Esistenza di una partizione dell'unità). *Sia $\mathcal{R} = \{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento di $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto t.c.*

(R1) $\Omega = \cup_{j\in\mathbb{N}} V_j$;

(R2) V_j è aperto e $V_j \subset\subset \Omega$ per ogni $j \in \mathbb{N}$;

(R3) Per ogni $K \subset \Omega$ compatto, esiste $N = N(K) \in \mathbb{N}$ t.c. $K \cap V_j = \emptyset$ per $j \geq N(K)$.

Allora esiste una famiglia di funzioni $\{\zeta_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_0(\Omega)$ t.c.

i) $\text{supp}(\zeta_j) \subset V_j \subset\subset \Omega$;

ii) $0 \leq \zeta_j \leq 1$ *per ogni* $j \in \mathbb{N}$*;*

iii) $\zeta(x) := \sum_{j\in\mathbb{N}} \zeta_j(x) = 1$ *per ogni* $x \in \Omega$*, dove per ogni* $K \subset \Omega$ *ci sono solo un numero finito di termini non nulli su* K*.*

Dimostrazione. Vedere Giusti [7] per i dettagli, ma l'idea è:

1. Dato $\mathcal{R}$, esiste un raffinamento $\widetilde{\mathcal{R}} = \{\widetilde{V}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ con $\widetilde{V}_j \subset\subset V_j$ per ogni $j \in \mathbb{N}$.
2. Per ogni coppia di aperti $\widetilde{V}_j \subset\subset V_j$ esiste una funzione *cutoff* $\gamma_j \in C_0^\infty(V_j)$ t.c. $\gamma_j \equiv 1$ su $\widetilde{V}_j$ (tramite mollificazione della funzione $\chi_{\widetilde{V}_j^\delta}$ con $\widetilde{V}_j^\delta$ un δ-intorno di $\widetilde{V}_j$).
3. Si definisce $\zeta_j = \gamma_j/\gamma$ con $\gamma(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \gamma_j(x)$.

□

Teorema 3.3.2 (di approssimazione globale di Meyers-Serrin)**.** *Sia* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *con* $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aperto. Allora esiste una successione di* $\{u_j\} \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ *tale che* $u_j \to u$ *in* $W^{k,p}(\Omega)$*.*

N.B. In particolare, se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ allora esistono le derivate forti $D_s^\alpha u \in L^p(\Omega)$ per ogni α con $|\alpha| \leq k$ (v. Def. 3.2.3).

N.B. Il risultato ci dice che l'insieme delle funzioni $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ è denso in $W^{k,p}(\Omega)$ ed è equivalente all'affermazione: per ogni $\delta > 0$ esiste $w \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ t.c. $\|w-u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \delta$.

Dimostrazione. 1. Ricoprimento di Ω: Per $j \in \mathbb{N}$

$$\Omega_j := \left\{ x \in \Omega \ : \ d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j} \ , \ |x| < j \right\}.$$

Nel caso $\partial\Omega = \emptyset$, cioè quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, usiamo invece $\Omega_j := B_j(0)$. Poniamo poi

$$\Omega_{-1} = \Omega_0 = \emptyset.$$

Infine definiamo

$$V_j = \Omega_{j+1} \setminus \overline{\Omega}_{j-1}.$$

Per costruzione $\mathcal{R} = \{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto di Ω con $V_j \subset\subset \Omega$ che è localmente finito.

2. Partizione dell'unità regolare subordinata ad $\mathcal{R}$: Applichiamo il Lemma 3.3.3 per trovare la famiglia $\{\zeta_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ dove

$$u = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \right) u = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j u.$$

Questa è una somma localmente finita, cioè avente un numero finito di termini non nulli in ogni punto. Inoltre, per le proprietà degli spazi di Sobolev (v. Teorema 3.2.1), abbiamo anche che

$$\zeta_j u \in W^{k,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad \operatorname{supp}(\zeta_j u) \subset V_j \subset\subset \Omega.$$

Quindi possiamo approssimare $\zeta_j u$ via mollificazione.

3. Fissiamo $\delta > 0$ e scegliamo $\varepsilon_j > 0$ piccolo in modo di avere

$$w_j = \eta_{\varepsilon_j} * (\zeta_j u) \text{ con } \begin{cases} \|w_j - \zeta_j u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \dfrac{\delta}{2^j} & \text{(v. Oss. 3.3.1)} \\ \operatorname{supp}(w_j) \subset \Omega_{j+2} \setminus \overline{\Omega}_{j-2} & \text{(piccolo ingrandimento del supporto)} \end{cases}$$

Notiamo che la mollificazione viene fatta a passo variabile in j, dove ε_j deve essere molto piccolo per j grande nel caso $\partial\Omega \neq \emptyset$

4. Ora poniamo $w = \sum_{j=1}^{+\infty} w_j$. Si ha $w \in C^\infty(\Omega)$. Infatti, per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ la restrizione $w_{|\Omega'}$ ha solo un numero finito di termini non nulli e tutti sono funzioni $C_0^\infty(\Omega)$. Quindi le serie di derivate converge uniformemente su ogni compatto in Ω.

5. Stimando lungo la successione $\Omega_i \nearrow \Omega$, troviamo

$$\begin{aligned} \|u - w\|_{W^{k,p}(\Omega_i)} &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} (w_j - \zeta_j u) \right\|_{W^{k,p}(\Omega_i)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{i+2} \|w_j - \zeta_j u\|_{W^{k,p}(\Omega_i)} = \sum_{j=1}^{i+2} \|w_j - \zeta_j u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\ &< \delta \sum_{j=1}^{i+2} \frac{1}{2^j} < \delta. \end{aligned}$$

La stima è uniforme in $i \in \mathbb{N}$. Andando a prendere $\sup_{i\in\mathbb{N}}$ otteniamo

$$\|u - w\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \delta.$$

□

Osservazione 3.3.2. Il teorema di approssimazione globale è falso per $p = \infty$.
Prendiamo $\Omega = (-1, 1)$ e $u(x) = |x|$. È evidente che $u \in L^\infty(\Omega)$ e che $u'_w(x) = \operatorname{sgn}(x) \in L^\infty(\Omega)$. Quindi $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Ora vorremmo che per ogni $\varepsilon > 0$ esistesse una $v = v_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ tale che

$$\|u - v\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \max\left(\|u - v\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u'_w - v'\|_{L^\infty(\Omega)} \right) < \varepsilon.$$

In particolare, abbiamo bisogno di $|v'(x) - \mathrm{sgn}(x)| < \varepsilon$ per quasi ogni $x \in \Omega$. Per $\varepsilon = 1/2$, ad esempio, questo è impossibile.

3.3.3 Approssimazione fino al bordo

Infine, ci chiediamo quando sia possibile approssimare con funzioni regolari fino al bordo.

Teorema 3.3.3 (di approssimazione globale fino al bordo)**.**
Siano $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitato con $\partial\Omega \in C^1$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Allora esiste una successione di $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ tale che $u_j \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$ o equivalentemente l'insieme delle funzioni $C^\infty(\overline{\Omega})$ è denso in $W^{k,p}(\Omega)$ se il bordo di Ω è regolare[8]*.*

Osservazione 3.3.3. Se consideriamo un insieme Ω che si trova da "entrambe le parti" del bordo di Ω, allora il teorema di approssimazione globale fino al bordo è falso. Ad esempio, consideriamo $\Omega := \{(x, y) \ : \ 0 < y < 1 \ , \ 0 < |x| < 1\}$ e

$$u(x, y) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Allora $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $Du = 0 \in L^p(\Omega)$ ma si può mostrare che non esiste una $w \in C^1(\overline{\Omega})$ arbitrariamente vicina ad u.

Dimostrazione. Abbiamo bisogno di costruire una partizione dell'unita rispetto alla chiusura $\overline{\Omega}$ di Ω e di calibrare la mollificazione vicino al bordo $\partial\Omega$.
1. Ricoprimento di $\overline{\Omega}$:

- Per ogni $x^* \in \partial\Omega$ esistono $r^* = r^*(x^*)$ e $\gamma^* : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 t.c.

$$\Omega \cap B_{r^*}(x^*) = \{x \in B_{r^*}(x^*) : \ x_n > \gamma^*(x_1, \ldots, x_{n-1})\},$$

  eventualmente riordinando e rinominando le coordinate.

- $\{B_{r^*/2}(x^*)\}_{x^*\in\partial\Omega}$ è un ricoprimento aperto di $\partial\Omega$ compatto, quindi possiamo estrarne un ricoprimento finito $\{B_{r_i^*/2}(x_i^*)\}_{i=1}^N$ del bordo. Aggiungiamo $V_0 \subset\subset \Omega$ t.c.

$$\mathcal{R} = \{V_0, B_{r_1^*/2}(x_1^*), \ldots, B_{r_N^*/2}(x_N^*)\} \quad \text{ricopre } \overline{\Omega}.$$

  Denotiamo con $\widetilde{\Omega} := V_0 \bigcup_{i=1}^N B_{r_i^*/2}(x_i^*)$ insieme aperto che contiene $\overline{\Omega}$.

[8] Seguiamo Evans [5] con l'ipotesi di C^1 ma ci basterebbe $\partial\Omega \in \mathrm{Lip}$.

2. Partizione dell'unità: Sia $\{\zeta_i\}_{i=0}^N \subset C_0^\infty(\widetilde{\Omega})$ una partizione dell'unità subordinata ad $\mathcal{R}$. In particolare, siano $\text{supp}(\zeta_0) \subset V_0 \subset\subset \Omega$ e per ogni $i = 1, \dots N$,

$$\zeta_i \equiv 0 \text{ vicino al bordo di } B_{r_i^*/2}(x_i^*) \quad \text{ma} \quad \zeta_i \equiv 1 \text{ vicino a } x_i^* \in \partial\Omega.$$

3. Fissiamo $\delta > 0$. Per il Teo. 3.3.1 (approssimazione locale) esiste $w_0 \in C^\infty(\overline{V_0})$ t.c. $\|w_0 - u\|_{W^{k,p}(V_0)} < \delta$.

4. Per ogni $i = 1, \dots, N$ esiste $w_i \in C^\infty(\overline{V_i})$ t.c. $\|w_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} < \delta$ dove

$$V_i = \Omega \cap B_{r_i^*/2}(x_i^*).$$

- Per semplificare la notazione, siano $x_0 = x_i^*, V = V_i, r = r_i^*$ con i fisso.
- Per ogni $x \in V$ e per ogni $\varepsilon > 0$ piccolo, poniamo

  $$x_\varepsilon := x + \lambda\varepsilon e_n$$

  dove $\lambda > 0$ è fisso ed è grande abbastanza per avere

  $$B_\varepsilon(x_\varepsilon) \subset \Omega \cap B_r(x_0), \quad \forall\, x \in V,\ \forall\, \varepsilon > 0 \text{ piccolo.}$$

  Questo si può fare per la compattezza di $\overline{V}$.
- Definiamo $\tau_\varepsilon u(x) := u(x_\varepsilon)$ la traslazione di u nella direzione e_n di una distanza $\lambda\varepsilon$.
- Definiamo $w_\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * \tau_\varepsilon u)(x)$. Traslando u abbiamo "creato spazio" per mollificare $\tau_\varepsilon u$. La traslata, quando viene valutata in un punto x vicino al bordo, prende il valore di u un po' più lontano ma con un passo che tenderà a zero.
- Si ha $w_\varepsilon \in C^\infty(\overline{V})$ per ogni ε piccolo. Infatti, w_ε è ben definita ed appartiene a $C^\infty(V)$. Inoltre, le sue derivate di ogni ordine sono uniformemente continue in V (esercizio). Quindi w_ε si estende con continuità fino alla chisura $\overline{V}$ di V.
- Si ha $\|w_\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(V)} \to 0$ per $\varepsilon \to 0^+$. Infatti, per ogni α con $|\alpha| \le k$

  $$\|D^\alpha w_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \le \|D^\alpha w_\varepsilon - D^\alpha(\tau_\varepsilon u)\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha(\tau_\varepsilon u) - D^\alpha u\|_{L^p(V)},$$

  dove il primo termine tende a zero per la mollificazione (usando un'argomentazione analoga a quella del Teo. 3.3.1). Inoltre

  $$\|D^\alpha(\tau_\varepsilon u) - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \to 0 \text{ per } \varepsilon \to 0^+$$

  per la continuità delle traslazioni in $L^p(V)$.

Questa costruzione viene fatta per ogni $i = 1, \dots, N$.

5. Poniamo $w := \sum_{i=0}^{N} \zeta_i w_i$ dove le $\{w_i\}_{i=1}^{N}$ sono le funzioni costruite nel Passo 4. Ricordiamo che soddisfano $\|w_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} < \delta$ e $w_i \in C^\infty(\overline{V_i})$.

- Si ha $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$ sfuttando la partizione dell'unità.
- Per ogni α con $|\alpha| \leq k$ usando la formula di Leibniz (v. Teorema 3.2.1) otteniamo

$$\begin{aligned} \|D^\alpha w - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} &= \left\| D^\alpha \left(\sum_{i=0}^{N} \zeta_i w_i \right) - D^\alpha \left(\sum_{i=0}^{N} \zeta_i u \right) \right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \sum_{i=0}^{N} \|D^\alpha (\zeta_i w_i) - D^\alpha (\zeta_i u)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C \sum_{i=0}^{N} \|w_i - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} < C(N+1)\delta, \end{aligned}$$

  con $\delta > 0$ arbitrario.

□

3.3.4 Applicazioni dell'approssimazione globale

L'idea: Generalizzare alcuni risultati noti per $u \in C^k(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ a quelli per $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tramite l'approssimazione globale del Teo. 3.3.2.

Teorema 3.3.4 (Regola della catena in $W^{1,p}(\Omega)$)**.**
Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f \in C^1(\mathbb{R})$ e f' limitata. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ per $1 \leq p \leq \infty$ tale che $f(u) \in L^p(\Omega)$. Allora $f(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e vale la formula

$$D(f(u)) = f'(u)Du.$$

N.B. Nel caso Ω limitato, l'ipotesi $f(u) \in L^p(\Omega)$ è sempre soddisfatta per $f \in C^1(\mathbb{R})$ con derivata limitata. Infatti

$$|f(t)| \leq |f(0)| + \left(\sup_{\mathbb{R}} |f'| \right) |t| := M_1 + M_2|t|, \quad t \in \mathbb{R}$$

e dunque

$$|f(u)|^p \leq 2^{p-1} \left[M_1^p + M_2^p |u|^p \right] \in L^1(\Omega)$$

usando $1 \leq p < \infty$, Ω limitato e $u \in L^p(\Omega)$.

Dimostrazione. Poichè $f(u) \in L^p(\Omega)$ dobbiamo mostrare che il gradiente debole $D(f(u))$ esiste ed è uguale a $f'(u)Du$, dove $f'(u)Du \in [L^p(\Omega)]^n$ perchè f' è limitato ed il gradiente debole soddisfa $Du \in [L^p(\Omega)]^n$.

1. Se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ allora il gradiente debole coincide con il gradiente classico e dunque vale la regola della catena

$$D(f(u)) = f'(u)Du \ \in [L^p(\Omega)]^n$$

2. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ allora il Teorema 3.3.2 fornisce una successione $\{u_j\} \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ t.c.

$$\begin{cases} u_j \to u & \text{in } L^p(\Omega) \\ Du_j \to Du & \text{in } [L^p(\Omega)]^n. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

   Basta mostrare che

$$f(u_j) \to f(u) \ \text{ in } \ L^p(\Omega); \tag{3.3.4}$$

$$D[f(u_j)] \to f'(u)Du \ \text{ in } \ [L^p(\Omega)]^n; \tag{3.3.5}$$

   ovvero che esiste il gradiente forte in $[L^p(\Omega)]^n$ e che il gradiente forte è $f'(u)Du$.

3. Passando eventualmente ad una sottosuccessione (denotata ancora con u_j) si ha:

$$u_j \to u \ \text{ q.o. in } \Omega. \tag{3.3.6}$$

   Poichè f è C^1 con derivata limitata si ha

$$\begin{cases} f(u_j) \to f(u) & \text{q.o. in } \Omega \\ |f(u_j) - f(u)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(u)|\,|u_j - u| & \text{q.o. in } \Omega. \end{cases}$$

   Dunque $f(u_j) = (f(u_j) - f(u)) + f(u) \in L^p(\Omega)$ ed otteniamo (3.3.4) per il teorema di convergenza dominata.

4. Per mostrare (3.3.5), notiamo che $D[f(u_j)] = f'(u_j)Du_j \in [C^0(\Omega) \cap L^p(\Omega)]^n$ e scriviamo

$$\begin{aligned} |D[f(u_j)] - f'(u)Du| &= |f'(u_j)Du_j - f'(u)Du + f'(u_j)Du - f'(u_j)Du| \\ &= \left|f'(u_j)[Du_j - Du] + [f'(u_j) - f'(u)]Du\right| \\ &\le \sup_{\mathbb{R}} |f'|\,|Du_j - Du| + |f'(u_j) - f'(u)|\,|Du| \\ &:= A_j + B_j. \end{aligned}$$

   - $A_j \to 0$ in $L^p(\Omega)$ per la convergenza (3.3.3).

- Usando la continuità e la limitatezza di f', otteniamo $B_j \to 0$ q.o. in Ω e la maggiorazione
$$|B_j| \leq 2 \sup_{\mathbb{R}} |f'| |Du| \in L^p(\Omega).$$
Quindi $B_j \to 0$ in $L^p(\Omega)$ e abbiamo (3.3.5).

□

Osservazione 3.3.4. La regola della catena vale anche per $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R})$, ma ci limiteremo solo ai seguenti esempi particolari

$$f(t) = |t|, \quad f(t) = \max\{0, t\}, \quad f(t) = \max\{0, -t\}.$$

Corollario 3.3.1. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ per $1 \leq p < \infty$. Allora:*

(i) $u^+ \in W^{1,p}(\Omega)$ *con*
$$Du^+ = \begin{cases} Du & u > 0 \\ 0 & u \leq 0. \end{cases}$$

(ii) $u^- \in W^{1,p}(\Omega)$ *con*
$$Du^- = \begin{cases} 0 & u \geq 0. \\ -Du & u < 0 \end{cases}$$

(iii) $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ *con*
$$D|u| = \begin{cases} Du & u > 0 \\ 0 & u = 0 \\ -Du & u < 0. \end{cases}$$

Osservazione 3.3.5. L'ipotesi $f(u) \in L^p(\Omega)$ è sempre soddisfatta per queste funzioni f. Inoltre, le formule per i gradienti deboli valgono per qualsiasi rappresentante u fissato per la classe $W^{1,p}(\Omega)$; cioè i diversi insiemi di livello dipendono dalla scelta del rappresentante u, ma sono diversi tra loro solo per un insieme di misura nulla.

Dimostrazione. Mostriamo il corollario solamente nel caso (*i*). Gli altri sono del tutto analoghi. Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Si vede facilmente che $f \in C^1(\mathbb{R})$ con

$$f'_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

limitata. Dunque applichiamo il teorema a f_ε e a u^+. Ora osserviamo che per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_\varepsilon(u) D\varphi dx &= -\int_\Omega D(f_\varepsilon(u))\varphi\, dx \quad \text{(derivata debole)} \\ &= -\int_\Omega \varphi f_\varepsilon'(u) Du\, dx \quad \text{(Teo. 3.3.4)} \\ &= -\int_{\{u>0\}} \varphi \frac{u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}} Du\, dx.\end{aligned}$$

Sfruttando la disuguaglianza di Hölder e il teorema di convergenza dominata possiamo concludere che

$$\int_\Omega f_\varepsilon(u) D\varphi\, dx \to \int_\Omega u^+ D\varphi\, dx = -\int_{\{u>0\}} Du\varphi\, dx.$$

Dunque esiste il gradiente debole di $f(u) = u^+$ ed è

$$Du^+ = \chi_{\{u>0\}} Du \in L^p(\Omega).$$

□

Corollario 3.3.2. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \le p < \infty$. Se $u = c$ quasi ovunque in $A \subset \Omega$ con $c \in \mathbb{R}$ costante, allora $Du = 0$ q.o. in A. In particolare, fissato un rappresentante u per una classe $W^{1,p}(\Omega)$, si ha $Du = 0$ q.o. su ogni suo insieme di livello.*

Dimostrazione. WLOG prendiamo $c = 0$, altrimenti ridefiniamo $\tilde{u} = u - c$. Abbiamo

$$Du = Du^+ - Du^- = 0 \text{ q.o. in } A.$$

□

3.4 Traccia in $W^{1,p}(\Omega)$

Problema: Data $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con , $1 \le p < \infty$ e $\partial\Omega$ "buono", dare un significato ad $u_{|\partial\Omega}$ o più in generale ad u_Γ con Γ di codimensione 1 in Ω.

È evidente l'importanza della questione per la formulazione debole del problema di Dirichlet. Se consideriamo una funzione $u \in C^0(\overline{\Omega})$ allora la sua restrizione al bordo appartiene a $C^0(\partial\Omega)$ e ha senso dire che $u = g$ su $\partial\Omega$ per $g \in C^0(\partial\Omega)$. Tipicamente però una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ non ammette una rappresentante continua su $\overline{\Omega}$ e dunque questa definizione non ha senso. Ancora peggio è il fatto che gli elementi di $W^{1,p}(\Omega)$ sono classi di equivalenza in cui identifichiamo funzioni uguali quasi ovunque. Che senso ha assegnare il valore di u sul bordo di Ω (o altri insiemi di misura nulla)? Il problema è serio e viene trattato mediante il concetto della *traccia*. Cominciamo con un esempio concreto.

Esempio 3.4.1. Consideriamo

$$\begin{cases} \Omega = B_R \times (0,T) \ \text{ con } \ B_R = B_R(0) \subset \mathbb{R}^{n-1} \\ \Omega_t = B_R \times (0,t) \\ u \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

Vogliamo stimare la norma $L^p(B_R)$ delle restrizioni di u alle fette $\{(x,t) \in \Omega : \ t = \text{costante}\}$.

- Per ogni s, t tali che $0 < s < t < T$, il TFCI ci dice che

$$u(x',t) - u(x',s) = \int_s^t D_n u(x',\tau)\, d\tau, \quad (x = (x',x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}).$$

  Andando a stimare e usando la disuguaglianza di Hölder nel caso $p > 1$ troviamo:

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |u(x',t) - u(x',s)|^p \, dx' &= \int_{B_R} \left| \int_s^t D_n u(x',\tau)\, d\tau \right|^p dx' \\ &\le \int_{B_R} \left[\int_s^t |Du(x',\tau)|\, d\tau \right]^p dx' \\ &\le \int_{B_R} \left[\left(\int_s^t d\tau \right)^{(p-1)/p} \left(\int_s^t |Du(x',\tau)|^p \, d\tau \right)^{1/p} \right]^p dx' \quad (p > 1) \\ &= (t-s)^{p-1} \int_{B_R} \int_s^t |Du(x',\tau)|^p \, d\tau \, dx', \end{aligned}$$

  ovvero

$$\|u(\cdot,t) - u(\cdot,s)\|_{L^p(B_R)} \le (t-s)^{(p-1)/p} \|Du\|_{L^p(\Omega_t)}, \quad (1 \le p < \infty)$$

  per ogni $u \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ e per ogni s, t con $0 < s < t < T$.

- Dunque la successione $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ definita da $v_j(x') := u(x', j^{-1})$ è di Cauchy in $L^p(B_R)$ con qualche limite $\varphi \in L^p(B_R)$. Questo limite viene detto *traccia di u su $B_R \subset \partial\Omega$* e soddisfa

$$\|u(\cdot,t) - \varphi(\cdot)\|_{L^p(B_R)} \le t^{(p-1)/p} \|Du\|_{L^p(\Omega_t)}.$$

- Infine, usando la densità di $C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$, si mostra che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avrà una traccia $\varphi \in L^p(B_R)$ su B_R.

3.4.1 Il teorema della traccia

Il risultato principale è il seguente teorema.

Teorema 3.4.1 (della traccia). *Siano $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega \in C^1$ e $1 \le p < \infty$. Allora esiste un operatore lineare e continuo $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ tale che*

i) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$;

ii) Esiste una costante $C = C(\Omega, p) > 0$ tale che

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{3.4.1}$$

Dimostrazione.
Passo 1: (Una stima di traccia locale)

Lemma 3.4.1. *Siano $B = B_{2r}(0)$, $\hat{B} = B_r(0)$, $\Sigma = B \cap \{x_n = 0\}$, $\Gamma = \hat{B} \cap \{x_n = 0\}$ e $1 \leq p < \infty$. Sia $u \in C^1(\overline{B^+})$ dove $B^+ = B \cap \{x_n > 0\}$. Allora esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$\int_\Gamma |u(x)|^p dx' \leq C \int_{B^+} (|u(x)|^p + |Du(x)|^p)\, dx, \quad \forall\, u \in C^1(\overline{B^+}).$$

dove abbiamo definito x' tramite $x = (x', x_n)$.

Dimostrazione. Prendiamo una funzione test $\zeta \in C_0^\infty(B)$ t.c. $0 \leq \zeta \leq 1$ su B e $\zeta \equiv 1$ su $\hat{B}$. Allora

$$\int_\Gamma |u|^p\, dx' \leq \int_\Sigma \zeta |u|^p\, dx' = -\int_{\partial B^+} \zeta |u|^p e_n \cdot \nu\, dS$$

dove ν è il versore normale uscente e abbiamo usato $\zeta \equiv 0$ sulla parte superiore di ∂B^+ e $\nu_{|\Sigma} = (0, -1)$. Adesso vogliamo applicare il teorema della divergenza (TdD) al campo vettoriale $\zeta |u|^p e_n$, dove $|u|^p = f(u)$ con $f(t) = |t|^p$. Se $1 < p < \infty$ non ci sono problemi, perchè $f \in C^1(\mathbb{R})$. Invece, se $p = 1$, abbiamo $|u| \in W^{1,1}(B^+)$ per il Cor. 3.3.1 e possiamo applicare il TdD lungo una successione approssimata. Si trova

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma |u|^p\, dx' &\leq -\int_{B^+} D_{x_n}(\zeta |u|^p)\, dx \\
&= -\int_{B^+} \left(|u|^p \zeta_{x_n} + \zeta p |u|^{p-1} \mathrm{sign}(u) D_n u \right) dx \\
&\leq C_1 \int_{B^+} |u|^p\, dx + p \int_{B^+} |u|^{p-1} |D_n u|\, dx \\
&\leq C_1 \int_{B^+} |u|^p\, dx + p \int_{B^+} \left(\frac{(p-1)|u|^p}{p} + \frac{|D_n u|^p}{p} \right) dx \\
&\leq (C_1 + p - 1) \int_{B^+} |u|^p\, dx + \int_{B^+} |Du|^p\, dx,
\end{aligned}$$

dove nella penultima disuguaglianza abbiamo applicato la disuguaglianza di Young.[9]
□

Passo 2: (Stima di traccia globale per funzioni regolari) *Sia $u \in C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$. Allora esiste $C = C(p, \Omega)$ tale che*

$$\int_{\partial\Omega} |u(x)|^p\, dS \leq C \int_\Omega (|u(x)|^p + |Du(x)|^p)\, dx. \tag{3.4.2}$$

[9] Cioè $ab \leq a^p/p + b^q/q$ per ogni $a, b \geq 0$ se $1/p + 1/q = 1$.

- Prendiamo un opportuno ricoprimento aperto $\{\tilde{\Gamma}_i\}_{i=1}^N$ di $\partial\Omega$ in modo da poterci ridurre ad un numero finito di stime come quelle del Passo 1. Più precisamente, per la compattezza e la regolarità di $\partial\Omega$, esistono:
  - una collezione finita di punti $\{x_i\}_{i=1}^N \subset \partial\Omega$;
  - un ricoprimento aperto $\{V_i\}_{i=1}^N$ di un intorno di $\partial\Omega$ in $\mathbb{R}^n$ tale che $x_i \in V_i$ per ogni i;
  - una famiglia di diffeomorfismi Φ_i di classe C^1 fra $B_i = B_{2r_i}(0) \subset \mathbb{R}^n$ e V_i

  tali che la collezione degli insiemi $\{\tilde{\Gamma}_i\}_{i=1}^N$ dove

  $$\tilde{\Gamma}_i := \Phi_i(\Gamma_i) \quad \text{con} \quad \Gamma_i = B_{r_i}(0) \cap \{y \in \mathbb{R}^n : y_n > 0\}$$

  fornisce un ricoprimento di $\partial\Omega$.

- Per ogni $i = 1, \dots, N$ possiamo stimare

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\Gamma}_i} |u|^p \, dS \quad &\leq C_i \quad \int_{\Gamma_i} |v_i|^p \, dy' \quad (v_i := u \circ \Phi_i, \;\; y := (y', y_n)) \\
&\leq \quad C_i' \int_{B_i^+} \left(|v_i|^p + |D_y v_i|^p \right) dy \quad \text{(per il Lemma 3.4.1)} \\
&\leq \quad C_i'' \int_{V_i \cap \Omega} (|u|^p + |Du|^p) \, dx \\
&\leq \quad C_i'' \int_{\Omega} (|u|^p + |Du|^p) \, dx,
\end{aligned}$$

  dove $C_i'' = C_i''(p, \Phi_i, V_i)$. Quindi

$$\int_{\partial\Omega} |u|^p \, dS \leq \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{\Gamma}_i} |u|^p \, dS_i \leq C(p, \Omega) \left[\int_{\Omega} (|u(x)|^p + |Du(x)|^p) \, dx \right],$$

  dove $C(p, \Omega) = \sum_{i=1}^N C_i''$. Dunque l'operatore lineare

$$\begin{array}{ccccc} T : & \left(C^1(\overline{\Omega}), \| \cdot \|_{W^{1,p}(\Omega)} \right) & \to & \left(C^0(\partial\Omega), \| \cdot \|_{L^p(\partial\Omega)} \right) \\ & u & \mapsto & u_{|\partial\Omega} \end{array}$$

  è definito su un sottospazio denso ed è limitato, cioè esiste $C = C(p, \Omega) > 0$ tale che

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall \, u \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{3.4.3}$$

- Prolunghiamo T a tutto $W^{1,p}(\Omega)$ per continuità. Più precisamente, data una generica $u \in W^{1,p}(\Omega)$ esiste una successione $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C^1(\overline{\Omega})$ tale che $u_j \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ per $j \to +\infty$ (per il Teo. 3.3.3). Dalla stima (3.4.3) otteniamo

$$\|Tu_j - Tu_k\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \, \|u_j - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0.$$

Dunque la successione $\{Tu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $L^p(\partial\Omega)$ ed esiste $g \in L^p(\partial\Omega)$ tale che $Tu_j \to g \in L^p(\partial\Omega)$. Definiamo $Tu := g$ e abbiamo

$$Tu = \lim_{j\to\infty} Tu_j \quad \text{in } L^p(\partial\Omega).$$

- Il prolungamento T soddisfa la stima (3.4.1). Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|Tu_j - g\|_{L^p(\partial\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left| \|u_j\|_{W^{1,p}(\Omega)} - \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \right| < \frac{\varepsilon}{2C} \text{ per ogni } j \geq N,$$

dove $C = C(p, \Omega)$ è la costante in (3.4.3). Quindi

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} := \|g\|_{L^p(\partial\Omega)} &\leq \|g - Tu_j\|_{L^p(\partial\Omega)} + \|Tu_j\|_{L^p(\partial\Omega)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + C\left(\frac{\varepsilon}{2C} + \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right) \quad \forall\, j \geq N, \end{aligned}$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario.

- Infine se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ allora la convergenza $Tu_j \to Tu$ è anche uniforme sui compatti. Ma $Tu_j = u_j|_{\partial\Omega} \in C^0(\partial\Omega)$ e quindi $Tu \in C^0(\partial\Omega)$ dove

$$Tu = u|_{\partial\Omega}.$$

□

Osservazione 3.4.1 (Sullo spazio $L^p(\partial\Omega)$)**.** L'operatore della traccia prende valori in $L^p(\partial\Omega)$. Tale spazio ha almeno due realizzazioni equivalenti.

1. La prima è molto legata alla tecnica usata nella dimostrazione. Presa una partizione dell'unità $\{\zeta_j\}_{i=1}^N$ subordinata ad un ricoprimemento aperto $\{\Gamma_i\}_{i=1}^N$ di $\partial\Omega$, per ogni f abbastanza regolare (ad esempio continua su $\partial\Omega$) si definisce

$$\|f\|^p_{L^p(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} |f|^p \, dS := \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} \zeta_j \, |f|^p \, dS,$$

dove ogni integrale in j viene trasportato ad un'integrale di Lebesgue in $\mathbb{R}^{n-1}$ tramite una parametrizzazione locale di un intorno in $\mathbb{R}^n$ di Γ_i. Poi lo spazio $L^p(\partial\Omega)$ è definto come il completamento di $C^0(\partial\Omega)$ rispetto alla norma sopra.

2. La seconda sfrutta il fatto che il bordo $\partial\Omega$ è chiuso in $\mathbb{R}^n$ e, quindi, misurabile rispetto alla misura di Hausdorff $\mathcal{H}_{n-1}$. Questa misura viene usata per dare una definizione intrinseca dello spazio $L^p(\partial\Omega)$ come spazio delle funzioni $f : \partial\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili rispetto ad $\mathcal{H}_{n-1}$ per cui esiste finito

$$\int_{\partial\Omega} |f|^p \, d\mathcal{H}_{n-1},$$

dove si identificano le funzioni uguali $\mathcal{H}_{n-1}$-quasi ovunque su $\partial\Omega$.

Esercizio 3.4.1 (Stima alternativa della traccia). Sia $\mu \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale tale che $\mu \cdot \nu \geq 1$ su $\partial\Omega \in C^1$. Tramite μ ed il teorema della divergenza, mostrare che esiste $C = C(n, p, \Omega)$ tale che

$$\int_{\partial\Omega} |u|^p dS \leq C \int_\Omega (|u(x)|^p + |Du(x)|^p)\, dx.$$

Nel caso concreto di $\Omega = B_r(0)$, stimare la costante C usando un campo vettoriale μ opportuno.

3.4.2 Gli spazi $W_0^{k,p}(\Omega)$

Definizione 3.4.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega \neq \emptyset$. Definiamo lo spazio

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|W^{k,p}(\Omega)\|},$$

ovvero lo spazio di limiti di successioni in $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $W^{k,p}(\Omega)$.

Se $\Omega = \mathbb{R}^n$ ritroviamo lo spazio $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ ed otteniamo un risultato utile di densità. [10]

Teorema 3.4.2 (Il caso $\mathbb{R}^n$)**.** *Siano $1 \leq p < \infty$ e $k \in \mathbb{N}_0$. Allora $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. In particolare lo spazio $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.*

N.B. Dall'Analisi Reale sappiamo che $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ e che la dimostrazione viene fatta tramite mollificazione e troncamento.

Dimostrazione. Per semplicità denotiamo con $\|\cdot\|_p$ la norma $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

1. Fissiamo una funzione cutoff $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.c.

   $$0 \leq \zeta \leq 1, \quad \zeta \equiv 1 \text{ per } |x| \leq 1, \quad \zeta \equiv 0 \text{ per } |x| \geq 2,$$

   e denotiamo con $\zeta_j(x) := \zeta(x/j)$. Abbiamo $\zeta_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con supporto in $B_{2j}(0)$ e le sue derivate $D^\alpha \zeta_j$ sono limitate da una costante C_α moltiplicata per $j^{-|\alpha|}$.

2. Per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ è facile verificare che $\|f - \zeta_j f\|_p \to 0$ per $j \to +\infty$ (usando il teorema di convergenza dominata).

3. Per $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ e $j \in \mathbb{N}$ definiamo $u_j = \zeta_j(\eta_{\frac{1}{j}} * u)$ dove η_ε è il mollificatore canonico.

4. $u_j \to u$ in $L^p(\Omega)$. Infatti

   $$\begin{aligned} \|u_j - u\|_p &\leq \|\zeta_j(\eta_{\frac{1}{j}} * u - u)\|_p + \|\zeta_j u - u\|_p \\ &\leq \|\eta_{\frac{1}{j}} * u - u\|_p + \|\zeta_j u - u\|_p \to 0 \text{ per } j \to +\infty, \end{aligned}$$

   usando il punto 2 e la convergenza $\eta_{\frac{1}{j}} * u \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ nota da Analisi Reale.

[10] Per l'anno accademico 2010-2011 questo risultato è facoltativo

5. Per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha $D_i(u_j) \to D_i u$ in $L^p(\Omega)$. Infatti

$$D_i u_j = D_i \zeta_j \left(\eta_{\frac{1}{j}} * u \right) + \zeta_j \left(\eta_{\frac{1}{j}} * D_i u \right).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \|D_i u_j - D_i u\|_p &\leq \frac{C_1}{j} \|\eta_{\frac{1}{j}} * u\|_p + \|\zeta_j(\eta_{\frac{1}{j}} * D_i u) - D_i u\|_p \\ &\leq \frac{C_1}{j} \|u\|_p + \|\zeta_j(\eta_{\frac{1}{j}} * D_i u - D_i u)\|_p + \|\zeta_j D_i u - D_i u\|_p \\ &\leq \frac{C_1}{j} \|u\|_p + \|\eta_{\frac{1}{j}} * D_i u - D_i u\|_p + \|\zeta_j D_i u - D_i u\|_p \to 0, \end{aligned}$$

per $j \to +\infty$

6. In modo analogo si mostra che $D^\alpha u_j \to D^\alpha u$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $|\alpha| \leq k$.

□

Invece se $\partial\Omega \neq \emptyset$ lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ è un sottospazio con una caratterizzazione importante.

Teorema 3.4.3 (Caratterizzazione di $W_0^{1,p}(\Omega)$)**.** *Sia $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega \in C^1$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Allora*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \;\Leftrightarrow\; Tu = 0 \text{ in } L^p(\partial\Omega)$$

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Per definizione di $W_0^{1,p}$ $u = \lim u_j$ con $u_j \in C_0^\infty$. Poichè T è lineare e continuo allora

$$Tu = T \lim_{j\to\infty} u_j = \lim_{j\to\infty} Tu_j = \lim_{j\to\infty} u_j|_{\partial\Omega} = 0 \text{ in } L^p(\partial\Omega)$$

($\Leftarrow$) È più impegnativo (v. Evans [5]).

□

Questa caratterizzazione ha una generalizzazione naturale negli spazi di ordine superiore. Lasciamo la sua dimostrazione per esercizio.

Corollario 3.4.1 (Caratterizzazione di $W_0^{k,p}(\Omega)$)**.** *Sia $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega \in C^k$, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Allora*

$$u \in W_0^{k,p}(\Omega) \;\Leftrightarrow\; T(D^\alpha u) = 0 \text{ in } L^p(\partial\Omega), \;\; \forall |\alpha| \leq k-1.$$

Il Teo. 3.4.3 suggerisce la seguente definizione essenziale per l'impostazione del problema di Dirichlet in senso debole.

Definizione 3.4.2. Siano $u, g \in W^{1,p}(\Omega)$ con $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$ e $1 \leq p < \infty$. Diciamo che $u = g$ *su $\partial\Omega$ in senso debole* se $u - g \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

La definizione è sensata perchè

$$\begin{aligned} u = g \text{ su } \partial\Omega &\Leftrightarrow u - g \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ &\Leftrightarrow T(u-g) = 0 \text{ in } L^p(\partial\Omega) \\ &\Leftrightarrow Tu = Tg \text{ in } L^p(\partial\Omega). \end{aligned}$$

Questa definizione sarà usata nel prossimo paragrafo in combinazione con il principio di Dirichlet ed il seguente risultato fondamentale.

Teorema 3.4.4 (Disugualianza di Poincarè). [11] *Siano $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $1 \le p < \infty$, allora esiste una costante $C = C(\Omega, p) > 0$ tale che*

$$\text{(P)} \qquad \|u\|_{L^p(\Omega)} \le C\|Du\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall\, u \in C_0^1(\Omega).$$

Inoltre, per la densità di $C_0^\infty(\Omega)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$, si ha (P) per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione.

1. Poichè Ω è limitato esiste un n-intervallo $Q = \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ t.c. $\Omega \subset Q$. Prolunghiamo $u \in C_0^1(\Omega)$ a tutto Q nel modo banale, cioè

$$u(x) := \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in Q \setminus \Omega. \end{cases}$$

   Definiamo $x = (x', x_n)$ e $Q' = \left\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \ : \ (x', x_n) \in Q \text{ per qualche } x_n\right\}$.

2. Per ogni $x \in Q$ si ha

$$u(x) = u(x', x_n) = u(x', x_n) - u(x', a_n) = \int_{a_n}^{x_n} D_n u(x', t)dt,$$

   dove $D_n = D_{x_n}$. Allora

$$\begin{aligned} |u(x', x_n)|^p &\le \left(\int_{a_n}^{x_n} |D_n u(x', t)|\ dt\right)^p \\ &\le \left[\left(\int_{a_n}^{x_n} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{a_n}^{x_n} |D_n u(x', t)|^p\ dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \quad \left(p' = \frac{p}{p-1}\right) \\ &\le (x_n - a_n)^{p-1} \int_{a_n}^{x_n} |Du(x', t)|^p\, dt. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

[11] A volte viene detta disuguaglianza di Friedrichs, soprattutto nel caso $p = 2$.

3. Integrando (3.4.4) su Q' otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{Q'} |u(x', x_n)|^p dx' &\leq (x_n - a_n)^{p-1} \int_{Q'} \left(\int_{a_n}^{x_n} |Du(x', t)|^p \, dt \right) dx' \\ &\leq (x_n - a_n)^{p-1} \int_{Q'} \left(\int_{a_n}^{b_n} |Du(x', t)|^p \, dt \right) dx' \\ &= (x_n - a_n)^{p-1} \|Du\|^p_{L^p(\Omega)} \ , \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

dove abbiamo usato $\text{supp}(Du) \subset\subset \Omega$.

4. Integrando (3.4.5) in x_n e usando $\text{supp}(u) \subset\subset \Omega$ otteniamo

$$\begin{aligned}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} &= \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{Q'} |u(x', x_n)|^p \, dx' \right) dx_n \\ &\leq \|Du\|^p_{L^p(\Omega)} \int_{a_n}^{b_n} (x_n - a_n)^{p-1} dx_n \\ &= \frac{(b_n - a_n)^p}{p} \|Du\|^p_{L^p(\Omega)} \ , \end{aligned}$$

ovvero la disuguaglianza (P) con la costante $C(\Omega, p) = \frac{(b_n - a_n)}{p^{1/p}}$ per ogni $u \in C^1_0(\Omega)$.

5. Infine, per $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ possiamo approssimare u tramite una successione $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_0(\Omega)$ ed applicare (P) lungo tale successione. Più precisamente, abbiamo

$$u_j \to u \ \text{ in } W^{1,p}(\Omega);$$

$$u_j \to u \ \text{ q.o. in } \Omega,$$

passando eventualmente ad una sottosuccessione. Per il Lemma di Fatou si ha

$$\begin{aligned}\int_\Omega \liminf_{j\to+\infty} |u_j|^p \, dx &\leq \liminf_{j\to+\infty} \int_\Omega |u_j|^p \, dx \\ &\leq C(\Omega, p)^p \liminf_{j\to+\infty} \int_\Omega |Du_j|^p \, dx \quad \text{usando (P)} \\ &= C(\Omega, p)^p \int_\Omega |Du|^p \, dx. \end{aligned}$$

Ma il membro sinistro tende a $\|u\|^p_{L^p(\Omega)}$ per la convergenza puntuale q.o. in Ω.

□

Osservazione 3.4.2. È evidente che:

a) La dimostrazione funziona per ogni direzione, prendendo al posto di D_n una qualsiasi D_i con $i = 1, \dots, n$. Dunque, una costante ottimale per questa dimostrazione sarebbe $C(p, \Omega) = d/p^{1/p}$ dove d è il *diametro minimo*

$$d := \min_{1 \le i \le n} d_i, \quad d_i = \sup\{|x_i - y_i| : \ x, y \in \Omega\}.$$

Una variante della dimostrazione fornisce la costante $C(n, \Omega) = \left(\omega_n^{-1}|\Omega|\right)^{1/n}$ (v. Gilbarg-Trudinger [6]).

b) La dimostrazione funziona anche con un dominio Ω illimitato con bordo, purchè abbia *ampiezza finita*, cioè esistono a_k, b_k finiti tali che la componente x_k di x soddisfa

$$a_k < x_k < b_k \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

c) Se invece $\Omega = \mathbb{R}^n$ ($\partial\Omega = \emptyset$), allora il teorema è falso. Non esiste C per cui $\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Torneremo a questo punto nel paragrafo riguardante le disuguaglianze di Sobolev.

Una consegunza importante della disuguaglianza di Poincarè è l'esistenza di una norma equivalente sullo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Corollario 3.4.2. *Siano $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $1 \le p < \infty$. Allora il funzionale definito da*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |Du|^p \, dx \right)^{1/p}$$

definisce una norma su $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente alla norma $\| \cdot \|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Dimostrazione.

- È evidente che $\| \cdot \|_{W^{1,p}(\Omega)}$ è non negativa, omogenea di grado uno e soddisfa la disuguaglianza triangolare. Basta allora controllare che sia cnche non degenere, ovvero

  $$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 0 \ \Rightarrow \ u = 0 \text{ in } W_0^{1,p}(\Omega).$$

  Per la disuguaglianza di Poincarè abbiamo $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 0$. Quindi ogni rappresentante della classe è nullo quasi ovunque in Ω.

- È anche evidente che per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha

  $$\begin{aligned} \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} &\le \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega (|Du|^p) \, dx \\ &\le (C^p + 1) \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

  usando di nuovo Poincarè.

□

3.5 Soluzione debole del problema di Dirichlet

Prendiamo una breve pausa dalla teoria generale degli spazi di Sobolev ed indichiamo un'applicazione della teoria sviluppata fino ad ora. Più precisamente, riprendiamo in considerazione il problema che ha dato la motivazione per lo studio degli spazi di Sobolev.

Problema di Dirichlet: Siano $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $g \in H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. Trovare u soluzione di

$$\text{(PD)} \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Definizione 3.5.1. Una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è detta *soluzione debole di (PD)* se

(i) $\displaystyle\int_\Omega Du \cdot Dv\, dx = 0$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$;

(ii) $u - g \in H_0^1(\Omega)$.

Osservazione 3.5.1. La condizione (i) nella definizione è equivalente a

$$\text{(i)}' \quad \int_\Omega Du \cdot Dv\, dx = 0, \quad \forall\, v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Infatti

(i) $\Rightarrow$ (i)': ovvio perchè $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$.

(i)' $\Rightarrow$ (i): Siano $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ t.c. $v_j \to v$ in $H^1(\Omega)$. Si ha

$$\forall j \in N: \quad 0 = \int_\Omega Du \cdot Dv_j\, dx \quad \to \int_\Omega Du \cdot Dv\, dx,$$

perchè $Dv_j \to Dv$ in $[L^2(\Omega)]^n$.

Teorema 3.5.1. *Per ogni $g \in H^1(\Omega)$ esiste $u \in H^1(\Omega)$ soluzione debole di (PD).*

Dimostrazione. (Il ritorno del principio di Dirichlet)

1. Cerchiamo $u \in H^1(\Omega)$ con $u - g \in H_0^1(\Omega)$ t.c.

$$E(u) = \inf\left\{E(v) = \int_\Omega |Dv|^2\, dx: \quad v \in H^1(\Omega),\ v - g \in H_0^1(\Omega)\right\}$$
$$:= m \geq 0$$

- Definiamo $H^1(\Omega; g) = \{v \in H^1(\Omega): \quad v - g \in H_0^1(\Omega)\}$.

- Esiste di sicuro una *successione minimizzante per E in $H^1(\Omega; g)$*, cioè esiste $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{v \in H^1(\Omega; g) \text{ t.c. } E(u_j) \to m\}$. Sfuttando la convessità di E si mostra che

$$\{Du_j\} \text{ è di Cauchy in } [L^2(\Omega)]^n, \tag{3.5.1}$$

come abbiamo fatto in §2.5 nel caso di una successione minimizzante e regolare. Quindi esiste $w \in [L^2(\Omega)]^n$ t.c. $Du_j \to w$ in $[L^2(\Omega)]^n$.

2. $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $H^1(\Omega)$: Infatti

- Si ha $u_j - u_k \in H^1_0(\Omega)$ perchè

$$T(u_j - u_k) = T(u_j - g + g - u_k) = T(u_j - g) + T(g - u_k) = 0 \text{ in } L^2(\Omega).$$

Usando la disuguaglianza di Poincarè e (3.5.1) si ha

$$\|u_j - u_k\|_{L^2(\Omega)} \le C\|Du_j - Du_k\|_{L^2(\Omega)} \to 0. \tag{3.5.2}$$

Usando (3.5.1) e (3.5.2) otteniamo che $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $H^1(\Omega)$. Per la completezza di $H^1(\Omega)$ esiste $u \in H^1(\Omega)$ tale che $u_j \to u$ in $H^1(\Omega)$.

- Per l'unicità del limite, abbiamo anche $Du = w$ in $[L^2(\Omega)]^n$.
- Dunque

$$E(u) = \lim_{j\to+\infty} \left(\int_\Omega |Du_j|^2 \, dx \right) = m = \inf_{v\in H^1(\Omega;g)} E(v).$$

3. Si ha $u - g \in H^1_0(\Omega)$. Infatti, per la continuità della traccia si ha

$$0 = T(u_j - g) \to T(u - g) \text{ per } j \to +\infty.$$

Quindi abbiamo un minimo u di E con traccia g su $\partial\Omega$.

4. Rimane solo da verificare che u è soluzione debole della PDE.

- Per ogni $t \in \mathbb{R}, v \in H^1_0(\Omega)$ risulta

$$m \le \int_\Omega |D(u + tv)|^2 \, dx := F_v(t) \quad (u + tv - g \in H^1_0(\Omega)).$$

Quindi $F_v'(0) = 0$ se F_v è derivabile in $t = 0$ poiché $F_v(t)$ ha minimo in $t = 0$.

- Si ha

$$\begin{aligned} F_v(t) &= \int_\Omega (Du + tDv) \cdot (Du + tDv) \, dx \\ &= \int_\Omega \left(|Du|^2 + 2tDu \cdot Dv + t^2|Dv|^2 \right) dx \\ &= F_v(0) + 2\left(\int_\Omega Du \cdot Dv \, dx \right) t + o(t) \quad \text{per } t \to 0. \end{aligned}$$

Quindi esiste $F_v'(0)$ e abbiamo

$$0 = F_v'(0) = \int_\Omega Du \cdot Dv\, dx, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

□

Domanda 1: La soluzione debole di (PD) è unica?

Risposta: Sì, per la disuguaglianza di Poincarè. Infatti, siano $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ due soluzioni deboli di (PD). Allora la differenza $u = u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$ è soluzione debole della PDE. Infatti entrambe le funzioni hanno traccia g su $\partial\Omega$ e per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ abbiamo

$$\int_\Omega Du \cdot Dv\, dx = \int_\Omega Du_1 \cdot Dv\, dx - \int_\Omega Du_2 \cdot Dv\, dx = 0.$$

Sostituendo $v = u$ otteniamo

$$\int_\Omega |Du|^2\, dx = 0.$$

Ma per Poincarè

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

ovvero $u = 0$ quasi ovunque in Ω.

Domanda 2: Usando un metodo variazionale, è possibile trattare anche il problema di Dirichlet per l'equazione non omogenea?

Risposta: Sì. Più precisamente, per $f \in L^2(\Omega)$ cerchiamo una soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema

$$\text{(PDN)} \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Notiamo che abbiamo preso la condizione omogenea $u = 0$ su $\partial\Omega$ senza limitare la generalità. Infatti possiamo sempre farne la somma con la soluzione debole già trovata per l'equazione di Laplace e $u = g$ su $\partial\Omega$. La nozione di soluzione è contenuta nella seguente definizione.

Definizione 3.5.2. Una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ è detta *soluzione debole di (PDN)* se

$$\int_\Omega Du \cdot Dv\, dx = \int_\Omega fv\, dx, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Affermazione: Esiste una soluzione debole u di (PDN) che soddisfa

$$E(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} E(v) \quad \text{dove} \quad E(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv|^2\, dx - \int_\Omega fv\, dx.$$

- Il funzionale è limitato dal basso. Infatti, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz abbiamo
$$\left| \int_\Omega f u \, dx \right| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$
Quindi
$$\begin{aligned} E(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^0_1(\Omega)} - \|u\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^0_1(\Omega)} - C\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$
dove abbiamo usato di nuovo Poincarè. Quindi $\inf_{H^1_0(\Omega)} E > -\infty$.

- Se esiste un minimo u allora u deve essere soluzione debole di (PDN). Basta fare un conto analogo a quello del Passo 4 nella dimostrazione del Teo. 3.5.1 (esercizio).

- Allora basta mostrare che esiste un minimo. Esiste di sicuro una successione minimizzante. Sfuttando un po' di analisi funzionale (la semincontinuità inferiore debole di E e la compattezza dell'immersione [12] $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$) si mostra l'esistenza di un minimo. Lasciamo i dettagli al corso di Calcolo delle Variazioni.

Osservazione 3.5.2. Usando di nuovo la disuguaglianza di Poincarè si può mostrare l'unicità della soluzione debole di (PDN) e anche la dipendenza continua sul termine noto. Più precisamente, si può mostrare la seguente affermazione: *Siano* $u_k \in H^1_0(\Omega)$ *soluzioni deboli del problema (PDN) con termine noto* $f_k \in L^2(\Omega)$ *con* $k = 1, 2$. *Allora*
$$\|u_1 - u_2\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C\|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}.$$

NwlCaptolo 4, torneremo alle questioni di esistenza, unicità e regolarità di soluzioni deboli per il problema di Dirichlet per *equazioni ellittiche*, dove l'operatore
$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i(x) D_i u + c(x)u, \quad a_{ij} = a_{ji}$$
prenderà il posto di Δ. Ricordiamo che l'ellitticità significa che la matrice dei coefficienti $[a_{ij}]$ è definita positiva/negativa .

3.6 Disuguaglianze di Sobolev

Il nostro obiettivo in questa sezione è studiare il problema dell'immersione di spazi di Sobolev in spazi di Lebesgue e spazi di Hölder. Lo strumento cruciale sono le cosiddette disuguaglianze di Sobolev. La domanda che ci poniamo è la seguente : se una funzione

[12] Da discutere alle fine di questo capitolo.

u appartiene ad un determinato spazio di Sobolev possiamo garantire che u appartenga automaticamente ad un altro spazio ? Iniziamo con alcune considerazioni generali per orientarci.

1. La questione è importante per la teoria di *regolarità delle soluzioni deboli*. Ad esempio, nel paragrafo precedente, abbiamo stabilito l'esistenza di una funzione $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ debolmente armonica tale che $u = g$ su $\partial\Omega$ nel senso della traccia. Però sappiamo che funzioni armoniche in senso classico risultano essere $C^\infty(\Omega)$.

2. Tipicamente le dimostrazioni consistono nella verifica di una certa disuguaglianza per una classe di funzioni regolari. Poi si sfruttano i risultati di densità.

3. Per semplicità, trattiamo in dettaglio solo gli spazi $W^{1,p}(\mathbb{R}^n), W_0^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\Omega)$. I risultati dipendono dalla relazione fra p e n. Ci sono tre casi:

   - $1 \le p < n$: immersioni in Spazi di Lebesgue L^q con restrizioni su q;
   - $p = n$: caso limite (è delicato)
   - $n < p \le \infty$: immersioni in spazi di Hölder $C^{0,\alpha}$ con restrizioni su α.

4. Esiste un trattamento analogo per gli spazi $W^{k,p}$ dove i risultati dipendono dalla relazione fra kp e n.

3.6.1 Disuguaglianze per $W^{1,p}$ nel caso $1 \le p < n$.

Ci sono restrizioni sui valori di q nelle immersioni di $W^{1,p}$ in L^q. Le conseguenze del seguente risultato forniscono una prima indicazione del problema. Ci chiediamo quando la norma L^p del gradiente Du controlla la norma L^q di $u \in W^{1,p}$. Se $\Omega = \mathbb{R}^n$ c'è solo una possibilità.

Proposizione 3.6.1. *Se esiste una costante $C = C(n,p)$ t.c.*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, u \in C_0^1(\mathbb{R}^n) \tag{3.6.1}$$

allora $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$ *ovvero* $q = \dfrac{np}{n-p} := p^*$.

Definizione 3.6.1. Sia $1 \le p < n$, è detto *esponente critico di Sobolev* il numero

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Osservazione 3.6.1. Si ha $p^* > p$. Infatti

$$0 < \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} < \frac{1}{p}.$$

Dimostrazione. Supponiamo che esista $C > 0$ per cui vale la (3.6.1).

1. Prendiamo $u \not\equiv 0$ in $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ e riscaliamo u tramite

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x) \text{ per ogni } \lambda \in (0, +\infty).$$

Si ha

$$\begin{cases} \|u_\lambda\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q \, dx = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q \, dy \\ \\ \|Du_\lambda\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda Du(\lambda x)|^p \, dx = \lambda^{p-n} \int_{\mathbb{R}^n} |Du(y)|^p \, dy \end{cases}$$

Quindi se vale (3.6.1) per ogni u_λ allora

$$\lambda^{-\frac{n}{q}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \lambda^{\frac{p-n}{p}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

ovvero

$$(**) \quad \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall \lambda \in (0, +\infty). \tag{3.6.2}$$

2. Dobbiamo avere la relazione $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$. Infatti, se l'esponente fosse positivo, potremmo far tendere $\lambda \to 0^+$ trovando che $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 0$. Questo è impossibile perchè $u \not\equiv 0$. In modo analogo, se l'esponente fosse negativo, potremmo far tendere $\lambda \to +\infty$ per arrivare ad un assurdo.

□

Osservazione 3.6.2. Per Ω limitato tale che $\Omega \supset B_1(0)$, possiamo fare il riscalamento u_λ di u per ogni $\lambda \in [1, +\infty]$ e far tendere $\lambda \to +\infty$, ma non possiamo far tendere $\lambda \to 0^+$. Otteniamo così

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}, \ \forall \, u \in C_0^1(\Omega) \quad \Rightarrow q \leq p^* = np/(n-p).$$

Quindi $q \leq p^*$ è condizione necessaria per l'immersione $W_0^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$. Infatti $C_0^1(\Omega)$ è denso in $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\|Du\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$.

Andiamo ora a mostrare la disuguaglianza centrale per il caso $1 \leq p < n$.

Teorema 3.6.1 (Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Sia $1 \leq p < n$. Allora esiste una costante $C = C(n, p)$ tale che*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in C_0^1(\mathbb{R}^n), \tag{3.6.3}$$

dove $p^* = np/(n-p)$.

Notiamo che il risultato è falso per $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Basta considerare $u \equiv 1$.

Dimostrazione.
Passo 1: (Il caso $p = 1$)

- Per il TFCI abbiamo che

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} D_i u(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_n)\, dt.$$

Quindi risulta

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)|\, dx_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Prendendo il prodotto di queste disuguaglianze otteniamo

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)|\, dx_i \right)^{\frac{1}{n-1}} := \prod_{i=1}^{n} f_i(\hat{x}_i), \tag{3.6.4}$$

dove $\hat{x}_i := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Le funzioni f_i sono non negative e non dipendono dalla variabile i-esima. Notiamo inoltre che l'esponente $n/(n-1)$ è $np/(n-p)$ per $p = 1$.

- Abbiamo bisogno di integrare (3.6.4) su $\mathbb{R}^n$. Per questo serve la seguente disuguaglianza integrale.

Lemma 3.6.1 (Disuguaglianza di Gagliardo)**.** *Siano $f_i(\hat{x}_i) \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} f_i(\hat{x}_i)\, dx \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_i^{n-1}\, d\hat{x}_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

N.B. Questa disuguaglianza si mostra per induzione, dove il caso $n = 2$ è banale. Si usa la disuguaglianza di Hölder generalizzata

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \prod_{i=1}^{n} f_i \right| dx \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_i|^{p_i}\, dx \right)^{\frac{1}{p_i}} \quad \text{se} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1,$$

con $p_i = n$ per ogni i (v. Lemma 3.2 di Giusti [7]).

- Integrando (3.6.4) su $\mathbb{R}^n$ e usando la disuguaglianza di Gagliardo otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx &\leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |D_i u(x)|\, dx_i \right] d\hat{x}_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |D_i u(x)|\, dx \right)^{\frac{1}{n-1}}, \end{aligned}$$

ovvero

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \left(\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} |D_i u(x)|\,dx\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Per completare la stima, ricordiamo due disuguaglianze elementari: la media aritmetica domina la media geometrica, ovvero

$$\left(\prod_{i=1}^{n} |a_i|\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a_i|. \tag{3.6.5}$$

e la seguente relazione fra le norme l^1 e l^2:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}. \tag{3.6.6}$$

Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \left(\prod_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} |D_i u(x)|\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^n} |D_i u(x)|\,dx \quad \text{usando (3.6.5)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\mathbb{R}^n} |Du|\,dx, \quad \text{usando (3.6.6)}\end{aligned}$$

ovvero

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\,\|Du\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in C_0^1(\mathbb{R}^n). \tag{3.6.7}$$

Dunque abbiamo mostrato la tesi nel caso $p = 1$ ed abbiamo anche trovato il valore della costante $C = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Passo 2: (Il caso $1 < p < n$) Si applica (3.6.7) alla funzione $v = |u|^\gamma$ con $\gamma > 1$ da stabilire in modo opportuno.

- Usando (3.6.7) e la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\mathbb{R}^n} |D(|u|^\gamma)|\,dx = \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1}|Du|\,dx \\ &\leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

- Ora scegliamo γ in modo da poter confrontare il termine a destra e il termine a sinistra della disuguaglianza, cioè

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1.$$

  In questo caso otteniamo che

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{np}{n-p}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}-\frac{p-1}{p}} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{n}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

  Poichè $\dfrac{n-1}{n} - \dfrac{p-1}{p} = \dfrac{n-p}{np} = \dfrac{1}{p^*}$ abbiamo la tesi con $C(n,p) = \dfrac{p(n-1)}{\sqrt{n}(n-p)}$.

□

Adesso usiamo la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev per ottenere altre disuguaglianze e le immersioni a loro associate.

Corollario 3.6.1 (Immersioni degli spazi $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$)**.** *Sia $1 \leq p < n$. Allora si ha un'immersione continua*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \quad \text{per ogni } q \in [p, p^*],\ p^* = np/(n-p);$$

cioè abbiamo l'inclusione di insiemi $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ per ogni $q \in [p,p^*]$ e la mappa di inclusione è lineare, iniettiva e continua. In particolare, esistono $C(n,p), C(n,p,q) > 0$ tali che

$$(GNS) \quad \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p)\,\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n);$$

$$(S) \quad \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p,q)\,\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n),\ q \in [p,p^*].$$

Dimostrazione. Le affermazioni sulle immersioni seguono dalle disuguaglianze (GNS) e (S)[13].

1. La disuguaglianza (GNS) segue dalla disuguaglianza (3.6.3), sfruttano la densità di $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ed il Lemma di Fatou come abbiamo fatto nella dimostrazione della disuguaglianza di Poincarè (v. Teo. 3.4.4).

2. Per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ abbiamo $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per definizione e $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ per (GNS). Ricordiamo che $p < p^*$. Allora dall'Analisi Reale [14] sappiamo di avere $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ per ogni $q \in (p,p^*)$ con la seguente *disuguaglianza di interpolazione*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|^{\vartheta}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,\|u\|^{1-\vartheta}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)},$$

[13] Abbiamo usato le sigle (GNS) per Gagliardo-Nirenberg-Sobolev e (S) per Sobolev.
[14] È sostanzialmente la disuguaglianza di Hölder.

dove $\vartheta = \vartheta(n,p,q) \in (0,1)$ è definita da

$$\frac{1}{q} = \frac{\vartheta}{p} + \frac{1-\vartheta}{p^*}.$$

Dunque applicando prima la disuguaglianza di Young [15] e poi (GNS) otteniamo dalla disuguglianza precedente

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\leq \vartheta \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + (1-\vartheta) \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \vartheta \|u\|_{L^p(R^n)} + (1-\vartheta) C(n,p) \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C(n,p,q) \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} , \end{aligned}$$

dove $C(n,p,q) = \vartheta + (1-\vartheta)C(n,p)$.

□

Corollario 3.6.2 (Immersione degli spazi $W_0^{1,p}(\Omega)$)**.** *Siano $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < n$. Allora per ogni $q \in [1,p^*]$ esiste $C = C(n,p,q,\Omega) > 0$ t.c.*

$$(PS) \quad \|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)} , \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

In particolare abbiamo un'immersione continua

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{per ogni } q \in [1,p^*],\ p^* = np/(n-p).$$

Dimostrazione. Di nuovo, basta mostrare la disuguaglianza (PS) [16] per funzioni in $C_0^\infty(\Omega)$.

1. Per $u \in C_0^\infty(\Omega)$, prolunghiamo u a tutto $\mathbb{R}^n$ prendendo $u \equiv 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Il prolungamento è una funzione in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Applichiamo il Teo. 3.6.1 per ottenere

   $$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,p) \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C(n,p) \|Du\|_{L^p(\Omega)} ,$$

   ed abbiamo (PS) nel caso critico $q = p^*$.

2. Il dominio Ω è limitato. Quindi per ogni $q \in [1,p^*)$ abbiamo l'immersione continua $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ tramite la disuguaglianza di Hölder. Quindi

   $$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\Omega)} &\leq C(p,q,\Omega) \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \quad \text{dove } C(p,q,\Omega) = |\Omega|^{\frac{p^*-q}{qp^*}} \\ &\leq C(p,q,\Omega)\, C(n,p) \|Du\|_{L^p(\Omega)} , \quad \forall q \in [1,p^*). \end{aligned}$$

□

[15] $ab \leq a^p/p + b^q/q$ se $1/p + 1/q = 1$ con $a, b \geq 0$.

[16] Abbiamo usato la sigla (PS) per Poincarè-Sobolev.

Osservazione 3.6.3. Il Corollario precedente fornisce una dimostrazione alternativa della disugualianza di Poincarè nel caso $q = p \in [1, p^*)$, ovvero

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(n, p, \Omega) \|Du\|_{L^p(\Omega)}, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

con

$$C(n, p, \Omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{p(n-1)}{n-p} |\Omega|^{\frac{p^*-p}{pp^*}} = \frac{p(n-1)}{\sqrt{n}(n-p)} |\Omega|^{\frac{1}{n}}.$$

Nella vecchia dimostrazione la costante era $d/p^{1/p}$ con d il diametro minimo di Ω (v. l'osservazione dopo il Teo. 3.4.4).

Osservazione 3.6.4. Siano $1 \leq p < n$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega$ "buono" (C^1 oppure Lip). Allora si ha un'immersione continua

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \quad \text{con} \quad p^* = np/(n-p).$$

tramite la disuguaglianza

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(n, p, \Omega) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

La dimostrazione sfrutta un prolugamento di $u \in W^{1,p}(\Omega)$ a tutto $\mathbb{R}^n$ come un elemento di $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (v. §5.4 di Evans [5] nel caso Ω limitato). Da questa disuguaglianza con $q = p^*$ si trovano altre immersioni usando di nuovo l'interpolazione nel caso di Ω illimitato con $q \in [p, p^*)$ e le inclusioni facili nel caso Ω limitato per $q \in (1, p^*)$.

Osservazione 3.6.5. Per Ω con $\partial\Omega$ "cattivo" esistono controesempi per l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^{p^*}(\Omega)$. Ad esempio, consideriamo

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1, |y| < \exp(-1/x^2)\} \quad \text{e} \quad u := x^3 \exp(1/x^2).$$

Si ha $u \in W^{1,1}(\Omega) \setminus L^q(\Omega)$ per ogni $q > 1$ (esercizio).

In conclusione, abbiamo visto che ogni $u \in W^{1,p}$ con $1 \leq p < n$ possiede più sommabilità di quanta ne dovrebbe avere per definizione, cioè $u \in L^p(\Omega)$, e questa sommabilità in più è quantificata dall'esponente critico di Sobolev $p^* > p$.

3.6.2 Disuguaglianze per $W^{1,p}$ nel caso $n < p \leq \infty$.

In questo caso, l'alta sommabilità $p > n$ implica che $u \in W^{1,p}$ ha un rappresentante continuo u^*. Non solo, si ha anche un controllo sul modulo di continuità ed immersioni continue in spazi di Hölder con esponenti di Hölder opportuni. Prima di presentare la disuguaglianza principale, abbiamo bisogno di alcuni nozioni rigardanti gli spazi di Hölder.

Definizione 3.6.2. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $\alpha \in (0,1]$. Lo spazio delle *funzioni Hölder-continue (o hölderiane) di esponente* α è

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in C^0(\Omega) : \ u \text{ è limitata e } \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \right) < +\infty \right\}.$$

Osservazione 3.6.6 (Prime proprietà)**.** a) Per $\alpha = 1$ si tratta delle funzioni lipschitziane e limitate in Ω.

b) Ogni $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ è uniformemente continua sui sottoinsiemi limitati di Ω. Quindi u ammette prolungamento continuo fino al bordo.

c) Sullo spazio $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ si definisce la seguente norma

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} &:= \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \\ &:= \sup_{x\in\Omega} |u(x)| + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \end{aligned}$$

d) Con questa norma $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^0(\Omega) : \ \|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < +\infty\}$ è uno spazio di Banach.

Esercizio 3.6.1. Verificare le affermazioni c) e d) nell'osservazione precedente.

In modo analogo, si definiscono spazi di Hölder di regolarità superiore.

Definizione 3.6.3. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\alpha \in (0,1]$, $k \in \mathbb{N}$.

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in C^k(\overline{\Omega}) : \ \|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} < +\infty \right\},$$

dove

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\beta|\leq k} \|D^\beta u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \sum_{|\beta|=k} [D^\beta u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Osservazione 3.6.7. Ricordiamo che $C^k(\overline{\Omega})$ era stato definito nella Definizione 2.2.3. Si mostra che $\left(C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}\right)$ è uno spazio di Banach.

Adesso siamo pronti per il risultato principale.

Teorema 3.6.2 (Disuguaglianza di Morrey)**.** *Sia $n < p < \infty$, allora esiste una costante $C = C(n,p)$ tale che*

$$(M) \qquad \|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, u \in C_0^1(\mathbb{R}^n),$$

dove $\alpha = 1 - \dfrac{n}{p}$.

Notiamo che $\alpha \in (0,1)$ perchè $0 < n/p < 1$ e che abbiamo usato la notazione $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ per $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ nel caso $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione.

Passo 1: *Esiste* $C_1 = C_1(n) = \dfrac{1}{n\omega_n}$ *tale che per ogni* $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$(1) \qquad \fint_{B_r(x)} |u(x) - u(y)|\, dy \le C_1 \int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dy, \quad \forall\, u \in C_0^1(\mathbb{R}^n).$$

- Per $y \in B_r(x) \setminus \{x\}$, scriviamo $y = x + sw$ con $s \in (0,r)$ e $|w| = 1$ e abbiamo

$$\begin{aligned} |u(x+sw) - u(x)| &= \left| \int_0^s \frac{d}{dt} u(x+tw)\, dt \right| \\ &= \left| \int_0^s Du(x+tw) \cdot w\, dt \right| \\ &\le \int_0^s |Du(x+tw)|\, dt. \end{aligned}$$

- Integriamo rispetto a $w \in \partial B_1(0)$ per trovare

$$\int_{\partial B_1(0)} |u(x+sw) - u(x)|\, dS_1(w) \le \int_{\partial B_1(0)} \left(\int_0^s |Du(x+tw)|\, dt \right) dS_1(w)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^s \left(\int_{\partial B_1(0)} |Du(x+tw)|\, dS_1(w) \right) dt \quad \text{(Fubini} - \text{Tonelli)} \\ &= \int_0^s \left(\int_{\partial B_t(x)} \frac{|Du(y)|}{|x-y|^{n-1}}\, dS_t(y) \right) dt \quad \begin{cases} y = x + tw \\ dS_t(y) = t^{n-1} dS_1(w) \end{cases} \\ &= \int_{B_s(x)} \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}} dy \quad \text{(Fubini per le bucce)} \end{aligned}$$

Usando $s < r$ otteniamo

$$(3.6.8) \qquad \int_{\partial B_1(0)} |u(x+sw) - u(x)|\, dS_1(w) \le \int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}\, dy.$$

- Ora moltiplichiamo (3.6.8) per s^{n-1} ed integriamo per $s \in (0,r)$:

$$\int_0^r s^{n-1} \left(\int_{\partial B_1(0)} |u(x+sw) - u(x)|\, dS_1(w) \right) ds \le \left(\int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}\, dy \right) \int_0^r s^{n-1}\, ds$$

$$\Rightarrow \quad \int_{B_r(x)} |u(x) - u(y)|\, dy \le \frac{r^n}{n} \int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}\, dy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} |u(x) - u(y)|\, dy \le \frac{1}{n\omega_n} \int_{B_r(x)} \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}\, dy.$$

Passo 2: *Esiste una costante $C_2 = C_2(n,p)$ tale che*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)| \le C_2 \, \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, u \in C_0^1(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

- Usiamo (1) per controllare i valori di u tramite le medie integrali:

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \fint_{B_1(x)} |u(x)|\,dy \le \fint_{B_1(x)} |u(x)-u(y)|\,dy + \fint_{B_1(x)} |u(y)|\,dy \\
&\le C_1 \int_{B_1(x)} \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}\,dy + \frac{1}{|B_1|}\left(\int_{B_1(x)} |u(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_1(x)} dy\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\le C_1 \, \|Du\|_{L^p(B_1(x))} \left[\int_{B_1(x)} |y-x|^{\frac{(1-n)p}{p-1}}\,dy\right]^{\frac{p-1}{p}} + |B_1|^{-\frac{1}{p}} \, \|u\|_{L^p(B_1(x))} \\
&= C_1 \, \|Du\|_{L^p(B_1(x))} \left[\int_0^1 \rho^{n-1+\frac{(1-n)p}{p-1}}\,d\rho\right]^{\frac{p-1}{p}} + |B_1|^{-\frac{1}{p}} \, \|u\|_{L^p(B_1(x))},
\end{aligned}$$

  dove l'integrale in ρ è finito se $n - 1 + \dfrac{(1-n)p}{p-1} > -1$, ovvero $n < p$.

- Quindi

$$|u(x)| \le C_2(n,p)\,\|u\|_{W^{1,p}(B_1(x))} \le C_2(n,p)\,\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.6.9}$$

  Passando all'estremo superiore otteniamo la disuguaglianza (2).

Passo 3: *Esiste una costante $C_3 = C_3(n,p)$ tale che*

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \le C_3 \, \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, u \in C_0^1(\mathbb{R}^n). \tag{3}$$

- Per ogni coppia $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq y$ poniamo $r := |x-y| > 0$ e $W := B_r(x) \cap B_r(y)$.

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| &= \fint_W |u(x)-u(y)|\,dz \le \fint_W |u(x)-u(z)|\,dz + \fint_W |u(y)-u(z)|\,dz \\
&:= A + B.
\end{aligned}$$

- Stimando A troviamo

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{|W|}\int_W |u(x)-u(z)|\,dz \le \frac{|B_r|}{|W|}\fint_{B_r(x)} |u(x)-u(z)|\,dz \quad (W \subset B_r(x)) \\
&\le \frac{|B_r|}{|W|} C_1 \int_{B_r(x)} \frac{|Du(z)|}{|z-x|^{n-1}}\,dz \quad \text{(Passo1)} \\
&\le C_1 C(n) \, \|Du\|_{L^p(B_r(x))} \left[\int_{B_r(x)} |x-z|^{\frac{(1-n)p}{p-1}}\,dz\right]^{\frac{p-1}{p}} \quad (|B_r| \le C(n)|W|, \ \forall r > 0) \\
&= C_1 C(n) \, \|Du\|_{L^p(B_r(x))} \left[|\partial B_1| r^{\frac{p-n}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}} \quad \text{(Fubini per le bucce)} \\
&\le C(n,p) \, \|Du\|_{L^p(B_r(x))} \, r^{1-\frac{n}{p}}.
\end{aligned}$$

- In maniera analoga otteniamo

$$B \leq C(n,p)\,\|Du\|_{L^p(B_r(y))}\, r^{1-\frac{n}{p}} \leq C(n,p)\,\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, r^{1-\frac{n}{p}}. \tag{3.6.10}$$

- Quindi per ogni x, y con $x \neq y$:

$$|u(x)-u(y)| \leq C_3(n,p)\,|x-y|^{1-\frac{n}{p}}\,\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

e dunque

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-n/p}} \leq C_3(n,p)\,\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Conclusione: combinando (2) e (3) otteniamo la tesi

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} &= \|u\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} + [u]_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C_2\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + C_3\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

dove $C = \max(C_2, C_3)$. □

Osservazione 3.6.8. Nella dimostrazione abbiamo usato il fatto che il supporto di u sia compatto solo per assicurare che la norma $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ sia finita e di conseguenza che sia finita la norma $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Usando (3.6.9) e (3.6.10), si vede che per avere $\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} < +\infty$ in realtà ci basterebbe

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|u\|_{W^{1,p}(B_1(x))} < +\infty \quad \text{e} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \|Du\|_{L^p(B_r(x))} < +\infty.$$

In particolare, ci basterebbe $u \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ per avere la disuguaglianza di Morrey (M) con norme finite. Usando poi la densità di $C_0^1(\Omega)$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, otterremmo la disuguaglianza (M) con norme finite per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Corollario 3.6.3. *Sia $n < p < \infty$. Allora esiste un'immersione continua $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ con $\alpha = 1 - \frac{n}{p} \in (0,1)$. Più precisamente, per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ esiste $u^* \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$u = u^* \ \text{ q.o. in } \mathbb{R}^n$$

ed esiste $C = C(n,p) > 0$ tale che

$$\|u^*\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrazione. Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

- Esiste $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.c. $u_j \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

- Per la disuguaglianza di Morrey su $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ abbiamo

$$\|u_j - u_k\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_j - u_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \ ,$$

ovvero $\{u_j\}$ è una successione di Cauchy in uno spazio di Banach. Quindi esiste $u^* \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$u_j \to u^* \quad \text{uniformemente in } \mathbb{R}^n.$$

- Ma $u_j \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ e quindi $u_{j_k} \to u$ q.o. in $\mathbb{R}^n$ per qualche sottosuccessione. Quindi $u = u^*$ q.o. in $\mathbb{R}^n$.

- Infine, si verifica la disuguaglianza (M) prendendo il limite per $j \to +\infty$ della disuguaglianza applicata ad $\{u_j\}$.

□

Corollario 3.6.4. *Siano $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $n < p < \infty$. Per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ esiste $u^* \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ con $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$ tale che*

$$u = u^* \ \text{ q.o. in } \Omega$$

ed esiste $C = C(n,p) > 0$ tale che

$$\|u^*\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\,\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

In particolare, si ha un'immersione continua $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ con $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.

Dimostrazione. Basta prolungare $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ad $u_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ prendendo $u_0 \equiv 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Poi si applicano il Cor. 3.6.3 e la disuguaglianza di Poincarè. □

Osservazione 3.6.9. Esiste anche un'immersione continua di $W^{1,p}(\Omega)$ in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ se $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega$ di classe C^1 (v. Teo. 5.6.5 di Evans [5]). La dimostrazione sfrutta di nuovo l'esistenza di un operatore di prolungamento da $W^{1,p}(\Omega)$ a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Osservazione 3.6.10. L'esponente di Hölder $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$ tende ad 1 per $p \to \infty$. Questo fatto suggerisce un'immersione continua $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Si può mostrare questo risultato direttamente, cioè senza far uso della disuguaglianza di Morrey.

In conclusione, abbiamo visto che per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p > n$ la funzione ammette rappresentante u^* continuo, anzi u^* è hölderiana di indice α, quindi anche uniformemente continua sui limitati. Grazie a ciò possiamo recuperare anche delle buone proprietà di differenziabilità.

Corollario 3.6.5 (Differenziabilità quasi ovunque)**.** *Sia $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ con $n < p \leq \infty$. Allora il rappresentante continuo u^* di u è differenziabile q.o. in Ω. Inoltre, il gradiente di u^* è uguale quasi ovunque al gradiente debole di u.*

Dimostrazione. Consultare Teo. 5.8.5 di Evans [5]. □

3.6.3 Altre disuguaglianze.

In questo beve paragrafo, vogliamo completare il quadro delle disuguaglianze di Sobolev. Ci limiteremo a dare gli enunciati e fare delle osservazioni. In particolare, vogliamo dire qualcosa sulle disuguaglianze per $W^{1,p}$ nel caso limite $p = n$ e per gli spazi $W^{k,p}$ con $k > 1$.

Osservazione 3.6.11 (Caso limite di $W^{1,p}$ con $p = n$)**.** Abbiamo visto che in tutti i casi ($W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$, $W^{1,p}(\Omega)$ se $\partial\Omega$ è "buono") esiste un'immersione continua dello spazio $W^{1,p}$ in:

a) L^q per $q \in \left[p, \dfrac{np}{n-p}\right]$ se $1 \le p < n$;

b) $C^{0,1-n/p} \subset L^\infty$ se $n < p \le \infty$.

Nel caso limite $p = n$ abbiamo l'immersione di $W^{1,n}$ in $L^q \setminus L^\infty$ per ogni $q \in [p, \infty)$.

Esempio 3.6.1 (Controesempio)**.** Siano $\Omega = B_1(0)$ e u la funzione definita da

$$u(x) = \log\left(\log\left(1 + \frac{1}{|x|}\right)\right)$$

Si può verificare che $u \in W^{1,n}(B_1(0))$ ma $u \notin L^\infty(B_1(0))$.

Per quanto riguarda le disuguaglianze e le immersioni di $W^{k,p}$ ci limiteremo ai casi più facili.

Teorema 3.6.3 (Disuguaglianze ed immersioni per $W_0^{k,p}(\Omega)$ con $kp \neq n$)**.** *Siano $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$. Allora*

kp < n: $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *per ogni* $q \in \left[1, \dfrac{np}{n-kp}\right]$ *ed esiste* $C = C(n,p,k,\Omega) > 0$ *t.c.*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C \|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W_0^{k,p}(\Omega).$$

kp > n: $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *dove*

$$\alpha = \begin{cases} \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p} & \text{se } \frac{n}{p} \notin \mathbb{N} \\ \text{arbitrario in } (0,1) & \text{se } \frac{n}{p} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ed esiste $C = C(n,p,k,\alpha,\Omega) > 0$ *t.c.*

$$\|u\|_{C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\alpha}(\overline{\Omega})} \le C \|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)}, \quad \forall\, u \in W_0^{k,p}(\Omega).$$

Si hanno le stesse immersioni e disuguaglianze anche nel caso $W^{k,p}(\Omega)$ con $\partial\Omega \in C^1$ (v. Teo. 5.6.6 di Evans [5]).

Dimostrazione. (Solo per $kp < n$) Per $k = 2$ con $2p < n$ se $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$ abbiamo

$$\begin{cases} u \in W_0^{2,p}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \ \ \forall\, q \in [1, p^*]\,,\ p^* = \frac{np}{n-p} \\ D_i u \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*]\,. \end{cases}$$

Quindi $u \in W_0^{1,p^*}(\Omega)$ (in realtà $W_0^{1,q}(\Omega)$ per ogni $q \in [1, p^*]$). Quindi $u \in L^{(p^*)^*}(\Omega)$ dove

$$(p^*)^* = \frac{np^*}{n-p^*} = \frac{n\left(\frac{np}{n-p}\right)}{n - \frac{np}{n-p}} = \frac{n^2 p}{n-p}\frac{n-p}{n^2-2np} = \frac{np}{n-2p}.$$

Tramite induzione si mostra la prima parte per $k > 2$. □

3.7 Compattezza delle immersioni

In questo paragrafo andiamo ad analizzare la compattezza delle immersioni trovate nel paragrafo precedente. Iniziamo con alcune definizioni ed osservazioni generali.

Definizione 3.7.1. Siano X e Y due spazi di Banach tali che $X \hookrightarrow Y$, cioè esiste una mappa lineare e iniettiva detta immersione da X in Y. Diciamo che X è *immerso con compattezza* in Y e lo indichiamo con $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ se:

(i) l'immersione da X in Y è continua, ovvero esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\|u\|_Y \leq C\,\|u\|_X, \quad \forall\, u \in X;$$

(ii) l'immersione è *compatta*, ovvero ogni insieme limitato A in X viene mandato in un insieme *relativamente compatto* in Y, ovvero con chiusura compatta in Y.

Non abbiamo introdotto alcun simbolo per l'immersione e parliamo di A come sottoinsieme di X ed Y. Spesso la mappa è l'inclusione quando $X \subset Y$ come nel caso delle immersioni da $W^{1,p}$ in L^q. Invece, nel caso dell immersioni negli spazi di Hölder la mappa è definita tramite la scelta di un rappresentante hölderiano di u.

Osservazione 3.7.1. Poichè Y è uno spazio di Banach, la compattezza (ii) dell'immersione ha due formulazioni equivalenti[17]:

(ii)' Ogni A limitato in X viene mandato in un'insieme *precompatto* in Y, ovvero ogni successione in A (limitata) viene mandata in una successione avente una sottosuccessione convergente in Y.

[17] Ricordiamo: *Se Y uno spazio metrico completo, allora $B \subset Y$ è relativamete compatto in Y $\Leftrightarrow$ B è precompatto in Y $\Leftrightarrow$ B è totalmente limitato in Y.*

(ii)'' Ogni A limitato in X viene mandato in un'insieme *totalmente limitato* in Y, ovvero tale che $\forall \delta > 0$ esistono $A_1, ..., A_{N(\delta)} \subset Y$ tali che

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{N} A_k \quad \text{e} \quad \text{diam}_Y(A_k) < \delta\,, \quad \forall\, k = 1, \dots, N(\delta).$$

La collezione $\{A_k\}$ è detta *δ-rete* per A in Y.

Lo strumento principale per lo studio della compattezza è il criterio di Ascoli-Arzelà.

Lemma 3.7.1 (Criterio di compattezza di Ascoli-Arzelà)**.** *Sia $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni $u_k : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tali che*

(i) Le u_k sono equilimitate, cioè esiste una costante M tale che $|u_k(x)| \leq M$ per ogni $x \in \Omega$ e per ogni k.

(ii) Le u_k sono uniformemente equicontinue, cioè $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che se $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$ e $|x - y| < \delta$ allora $|u_k(x) - u_k(y)| < \varepsilon$ per ogni k.

Allora esiste una sottosuccessione $\{u_{k_j}\}$ e una funzione continua u tali che $u_{k_j} \to u$ uniformemente sui compatti di Ω.

Più precisamente, abbiamo bisogno della compattezza delle immersioni degli spazi di Hölder nello spazio $C^0(\overline{\Omega})$ delle funzioni uniformemente continue sui sottoinsiemi limitati di Ω. Tali funzioni ammettono prolungamento con continuità fino al bordo. Nel caso che Ω sia limitato, tali funzioni sono anche limitate e formano uno spazio di Banach rispetto alla norma $\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$.

Lemma 3.7.2. *Sia $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$. Allora $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ per ogni $\alpha \in (0, 1]$.*

Dimostrazione. È evidente la continuità dell'immersione $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$. Quindi basta mostrare che ogni insieme A che sia limitato in norma $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$ è precompatto in $C^0(\overline{\Omega})$. Per il teorema di Ascoli-Arzelà basta mostrare l'equilimitatezza e l'equicontinuità delle funzioni che appartengono ad A, ovvero:

(i) $\sup_{\Omega} |u| \leq M < +\infty$ per ogni $u \in A$

(ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta(\varepsilon)$ t.c.

$$x, y \in \Omega,\ |x - y| < \delta \ \Rightarrow\ |u(x) - u(y)| < \varepsilon, \quad \forall u \in A.$$

A è limitato in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ se esiste C_A t.c

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C_A, \quad \forall u \in A.$$

Quindi abbiamo (i) con $M = C_A$ e (ii) con $\delta(\varepsilon) = (\varepsilon/C_A)^{1/\alpha}$. □

Con questi richiami generali, andiamo a considerare la compattezza delle immersioni di Morrey e di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev per gli spazi $W^{1,p}$.

3.7.1 Compattezza e l'immersione di Morrey

Nel caso $n < p \leq \infty$, possiamo combinare la continuità dell'immersione di Morrey con la compattezza dell'immersione del Lemma 3.7.2.

Teorema 3.7.1 (Compattezza delle immersioni nello spazio $C^0(\overline{\Omega})$)**.**
Siano $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $n < p \leq \infty$. Allora:

(a) $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$.

(b) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ *se* $\partial\Omega \in C^1$.

Dimostrazione. Dimostriamo solamente l'affermazione (a). La dimostrazione di (b) è analoga. Sia $p \in (n, \infty)$. Per la disuguaglianza di Morrey, abbiamo l'immersione continua

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega}) \tag{3.7.1}$$

con

$$\|u^*\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Se $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ è limitata in norma, allora $\{u_j^*\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{\Omega})$ è limitata. Per il Lemma 3.7.2 possiamo estrarre una sottosuccesione $\{u_{j_k}^*\}$ che converge in norma $C^0(\overline{\Omega})$ ad $u^* \in C^0(\overline{\Omega})$. Nel caso $p = \infty$, l'immersione continua (3.7.1) ha codominio $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ ma possiamo ancora applicare il Lemma 3.7.2 in questo caso. □

Corollario 3.7.1 (Compattezza delle immersioni negli spazi $L^q(\Omega)$)**.**
Siano $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $n < p \leq +\infty$. Allora:

(a) $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ *per ogni* $q \in [1, \infty]$.

(b) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ *per ogni* $q \in [1, \infty]$ *se* $\partial\Omega \in C^1$.

Dimostrazione. Di nuovo, dimostriamo solo l'affermazione (a) per $1 \leq p < \infty$. Abbiamo un'immersione continua

$$C^0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{per ogni } \ q \in [1, \infty]$$

perchè abbiamo la limitatezza del dominio Ω e la limitatezza delle funzioni in $C^0(\overline{\Omega})$. Per ogni successione $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ limitata in norma esiste una successione $\{u_{j_k}^*\}$ tale che

$$u_{j_k}^* \to u^* \ \text{ in } \ C^0(\overline{\Omega}).$$

Quindi $u_{j_k}^* \to u^*$ in norma $L^q(\Omega)$. □

3.7.2 Compattezza e l'immersione di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Nel caso $1 \leq p < n$, possiamo combinare la continuità dell'immersione di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev con un criterio di compattezza in L^q, sfruttando anche la compattezza dell'immersione del Lemma 3.7.2 per mostrare il seguente risultato.

Teorema 3.7.2 (Teorema di compattezza di Reillich-Kondrachov)**.**
Siano $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < n$. Allora:

(a) $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ *per ogni* $1 \leq q < p^*$.

(b) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ *per ogni* $1 \leq q < p^*$ *se* $\partial\Omega \in C^1$.

Dimostrazione. Mostriamo solamente la (*a*).
Passo 1: Sappiamo già che l'immersione $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ è continua per $1 \leq q \leq p^*$. Dunque ci basta dimostrare che l'immersione è compatta, cioè ogni A limitato in $W_0^{1,p}(\Omega)$ deve essere precompatto in $L^q(\Omega)$.

Passo 2: Abbiamo il seguente criterio di compattezza in $L^q(\Omega)$ tramite mollificazione.

Lemma 3.7.3. *Siano $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $A \subset L^q(\Omega)$ tale che*

(i) A è limitato, cioè esiste una costante M t.c. $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq M$ per ogni $u \in A$.

(ii) $u_\varepsilon \to u$ in $L^q(\Omega)$ uniformemente per ogni $u \in A$.

Allora A è relativamente compatto in $L^q(\Omega)$.

N.B. Per avere la mollificata $u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ definita su tutto Ω, consideriamo u definita su tutto $\mathbb{R}^n$ prendendo $u \equiv 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Questo è lecito per $W_0^{1,p}(\Omega)$. Nel caso (b), serve invece un'operatore di prolungamento diverso (v. Evans [5]).

Dimostrazione. Mostriamo che A è totalmente limitato: per ogni $\delta > 0$ esite una δ-rete $\{A_1, \dots A_{N(\delta)}\} \subset L^q(\Omega)$ tale che $A \subset \bigcup_{k=1}^{N} A_k$ e $\operatorname{diam}(A_k) < \delta$ per ogni k.

- Fissiamo $\delta > 0$ arbitrario. Per l'ipotesi (ii) $\exists\ \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta)$ t.c.

$$\|u_{\varepsilon_0} - u\|_{L^q(\Omega)} < \frac{\delta}{4}, \quad \forall u \in A,$$

  dove u_{ε_0} è definito su tutto Ω usando il prolugamento $u \equiv 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Ricordiamo che $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

- Poniamo $A_0 := \{u_{\varepsilon_0} : u \in A\}$. Ci basta trovare una $\delta/2$-rete per A_0, cioè $\{A_1^{\varepsilon_0}, \dots A_{N(\delta)}^{\varepsilon_0}\} \subset L^q(\Omega)$ t.c. $A_0 \subset \cup_{k=1}^{N} A_k^{\varepsilon_0}$ e $\operatorname{diam}_{L^q}(A_k^{\varepsilon_0}) < \delta/2$ per ogni k. Infatti è evidente che la collezione corrispondente $\{A_k\}$ è una δ-rete per A (esercizio).

- **Affermazione:** *A_0 è limitato in norma $C^{0,1}(\overline{\Omega})$.* Infatti:

$$u_{\varepsilon_0}(x) = \int_\Omega \eta_{\varepsilon_0}(x-y)u(y)dy$$

e

$$u_{\varepsilon_0}(x) - u_{\varepsilon_0}(z) = \int_\Omega \left[\eta_{\varepsilon_0}(x-y) - \eta_{\varepsilon_0}(z-y)\right] u(y)dy.$$

Dunque grazie alla disuguaglianza di Hölder si ha

$$|u_{\varepsilon_0}(x)| \leq \sup_{\mathbb{R}^n} |\eta_{\varepsilon_0}| \int_\Omega |u(y)|\, dy \leq C_1(\varepsilon_0, \eta, n)\, |\Omega|^{\frac{q-1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Inoltre per ogni $x, z \in \Omega$ con $x \neq z$ si ha

$$\frac{|u_{\varepsilon_0}(x) - u_{\varepsilon_0}(z)|}{|x-z|} \leq [\eta_{\varepsilon_0}]_{C^{0,1}(\overline{\Omega})} \int_\Omega |u(y)|\, dy \leq C_2(\varepsilon_0, \eta, n)\, |\Omega|^{\frac{q-1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)}$$

e dunque

$$\|u_{\varepsilon_0}\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})} \leq C(\varepsilon_0, \eta)\, |\Omega|^{\frac{q-1}{q}} M \quad \forall\, u \in A(u_{\varepsilon_0} \in A_0).$$

- Per il Lemma 3.7.2 A_0 è relativamente compatto in $C^0(\overline{\Omega})$. Quindi per ogni $\tau > 0$ esiste una τ-rete per A_0 in $C^0(\overline{\Omega})$; ovvero un ricoprimento $\{A_1^{\varepsilon_0}, \dots A_{N(\tau)}^{\varepsilon_0}\}$ di A_0 con $\mathrm{diam}_{C^0(\overline{\Omega})} < \tau$. Per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\mathrm{diam}_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/q} \mathrm{diam}_{C^0(\overline{\Omega})} \leq |\Omega|^{1/q}\tau = \frac{\delta}{2},$$

scegliendo

$$\tau = \frac{\delta}{2}|\Omega|^{-\frac{1}{q}}.$$

□

Ora dobbiamo verificare che preso un $A \subset W_0^{1,p}$ limitato esso soddisfa le ipotesi del Lemma 3.7.3.

Passo 3: A è limitato in $L^q(\Omega)$ per ogni $1 \leq q < p^*$ per la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev. Quindi ci rimane solo da mostrare che $u_\varepsilon \to u$ in $L^q(\Omega)$ uniformemente per ogni $u \in A$. Riusciamo a fare ciò direttamente per $q = 1$. Invece per $1 < q < p^*$ sfruttiamo interpolazione negli spazi di Lebesgue.

Passo 4: (Il caso $q = 1$) Si ha $u_\varepsilon \to u$ in $L^1(\Omega)$ uniformemente per ogni $u \in A$ usando la seguente stima.

Lemma 3.7.4. *Sia $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$. Per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha*

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^1} \leq \varepsilon |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|Du\|_{L^p(\Omega)}. \tag{3.7.2}$$

Quindi se A è limitato in $W_0^{1,p}(\Omega)$ la convergenza $u_\varepsilon \to u$ in $L^1(\Omega)$ è uniforme rispetto ad $u \in A$. Quindi abbiamo la compattezza dell'immersione di $W_0^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ nel caso $q = 1$.

Dimostrazione. (del Lemma 3.7.4) Per la densità di $C_0^\infty(\Omega)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ basta mostrare la stima (3.7.2) per $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Si ha (ricordando il fatto che $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(z)\,dz = 1$):

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) - u(x) &= \int_{B_\varepsilon(x)} \varepsilon^{-n}\eta\Big(\frac{x-y}{\varepsilon}\Big)\big[u(y) - u(x)\big]\,dy \\ &= \int_{B_1(0)} \eta(z)\,\big[u(x - \varepsilon z) - u(x)\big]\,dz \\ &= \int_{B_1(0)} \eta(z)\left[\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(u(x - t\varepsilon z)\right)\,dt\right] dz \\ &= -\varepsilon \int_{B_1(0)} \eta(z)\left[\int_0^1 Du(x - t\varepsilon z)\cdot z\,dt\right] dz. \end{aligned}$$

Poi usando $|z| \le 1$ e integrando su Ω risulta

$$\int_\Omega |u_\varepsilon(x) - u(x)|\,dx \le \varepsilon \int_{B_1(0)} \eta(z)\left(\int_0^1 \left(\int_\Omega |Du(x - t\varepsilon z)|\,dx\right) dt\right) dz.$$

Ma $\int_\Omega |Du(x - t\varepsilon z)|\,dx \le \int_\Omega |Du(x)|\,dx$ perchè u ha supporto compatto in Ω. Quindi

$$\int_\Omega |u_\varepsilon(x) - u(x)|\,dx \le \varepsilon \left(\int_{B_1(0)} \eta(z)\,dz\right)\left(\int_\Omega |Du(x)|\,dx\right) = \varepsilon \int_\Omega |Du(x)|\,dx.$$

Applicando la disuguaglianza di Hölder otteniamo la stima (3.7.2). □

Passo 5: (Il caso $1 < q < p^*$) Se A è limitato in $W_0^{1,p}(\Omega)$ allora $u_\varepsilon \to u$ in $L^q(\Omega)$ uniformemente per ogni $u \in A$. Infatti per $q \in (1, p^*)$ abbiamo la disuguaglianza di interpolazione

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^q(\Omega)} \le \|u_\varepsilon - u\|^{\vartheta}_{L^1(\Omega)}\,\|u_\varepsilon - u\|^{1-\vartheta}_{L^{p^*}(\Omega)}$$

dove il parametro $\vartheta \in (0, 1)$ è definito da

$$\frac{1}{q} = \frac{\vartheta}{1} + \frac{1-\vartheta}{p^*}.$$

Poi usando la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, la limitatezza di A in $W_0^{1,p}(\Omega)$ e la stima del Passo 4 otteniamo

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u\|_{L^q(\Omega)} &\le C(n,p)\,\|u_\varepsilon - u\|^{\vartheta}_{L^1(\Omega)}\,\|Du_\varepsilon - Du\|^{1-\vartheta}_{L^p(\Omega)} \\ &\le C(n,p,q)\,\|u_\varepsilon - u\|^{\vartheta}_{L^1(\Omega)} \quad \forall\, u \in A \\ &\le C(n,p,q)\varepsilon^{\vartheta}\,\|Du\|^{\vartheta}_{L^p(\Omega)} \quad \forall\, u \in A \\ &\le C'(n,p,q)\varepsilon^{\vartheta} \to 0, \end{aligned}$$

uniformemente per $u \in A$. Per il criterio della compattezza (Lemma 3.7.3) abbiamo la compattezza dell'immersione nel caso $1 < q < p^*$. □

Corollario 3.7.2. *Sia $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$. Allora:*

(a) $W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ *per ogni* $1 \le q < +\infty$

(b) $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ *per ogni* $1 \le q < +\infty$ *se* $\partial\Omega \in C^1$.

Dimostrazione. Mostriamo solo la (*a*). Per ogni $p \in [1, n)$ abbiamo la catena di immersioni

$$W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{per ogni } q \in \left[1, p^* = \frac{np}{n-p}\right),$$

e quindi

$$W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{per ogni } q \in \left[1, p^* = \frac{np}{n-p}\right),$$

dove $p^* \in [n/(n-1), \infty)$ per $p \in [1, n)$. □

Corollario 3.7.3. *Sia $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $1 \le p < \infty$. Allora:*

(a) $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$.

(b) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$ *se* $\partial\Omega \in C^1$.

Dimostrazione. Sappiamo di avere delle immersioni compatte in $L^q(\Omega)$ dove $q = q(p, n)$:

$$p > n: \quad \text{per ogni } q \in [1, \infty]$$

$$p = n: \quad \text{per ogni } q \in [1, \infty)$$

$$1 \le p < n: \quad \text{per ogni } q \in [1, p^*).$$

In ogni caso $q = p$ è un valore ammissibile. Ricordiamo che $p^* > p$ nell'ultimo caso. □

Osservazione 3.7.2. L'ultimo corollario è molto utile. Infatti possiamo domandarci cosa succeda ad una successione $\{u_j\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ limitata in norma. Possiamo dire che esistono una sottosuccessione $\{u_{j_k}\}$, una $u \in L^p(\Omega)$ ed una $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tali che

$$\begin{cases} u_{j_k} \to u & \text{in } L^p(\Omega) \quad \text{(convergenza forte)} \\ u_{j_k} \rightharpoonup v & \text{in } W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{(convergenza debole)}, \end{cases}$$

dove $1 < p < \infty$ (serve la riflessività di $W_0^{1,p}(\Omega)$ per l'affermazione sulla convergenza debole). Per ottenere la convergenza forte in $W_0^{1,p}(\Omega)$ basta essere in grado di "promuovere" la convergenza debole a quella forte, ma abbiamo un'aiuto in più, ovvero la convergenza forte in norma L^p.

Capitolo 4

Equazioni ellittiche del secondo ordine

4.1 Introduzione

Obiettivo: Trattare il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1.1}$$

dove $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ è la funzione incognita, f è assegnata e L è un *operatore differenziale del secondo ordine lineare* scritto in uno dei seguenti modi.

Definizione 4.1.1. Diciamo che l'operatore L è:

(a) *in forma di non divergenza* se

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i u + cu \tag{4.1.2}$$

(b) *in forma di divergenza* se

$$\begin{aligned} Lu &= -\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij} D_i u) + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i u + cu \\ &= -\mathrm{div}(A(x)Du) + b(x) \cdot Du + c(x)u, \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

dove $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ e $b = (b_1, \ldots, b_n)$.

Le funzioni $a_{ij}(x)$,$b_i(x)$ e $c(x)$ sono dette *coefficienti* dell'operatore L.

Osservazione 4.1.1. a) Se i coefficienti $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, allora la forma di divergenza e la forma di non divergenza sono scritture equivalenti. Infatti

$$D_j(a_{ij}D_i) = a_{ij}D_{ij} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}D_i, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Quindi per trasformare la forma (4.1.3) nella (4.1.2) basta togliere dal coefficiente b_i l'espressione $\sum_{j=1}^n D_j a_{ij}$, ovvero con $\tilde{b}_i = b_i - \sum_{j=1}^n D_j a_{ij}$ abbiamo

$$\begin{aligned} Lu &= -\sum_{i,j=1}^n D_j(a_{ij}D_i u) + \sum_{i=1}^n b_i D_i u + cu \\ &= -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}D_{ij}u + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i D_i u + cu. \end{aligned}$$

Per trasformare la forma (4.1.2) nella (4.1.3) basta aggiungere al coefficiente b_i l'espressione $\sum_{j=1}^n D_j a_{ij}$.

b) La scrittura in forma di divergenza è naturale per i metodi di energia, basati fondamentalmente sull'integrazione per parti, mentre la scrittura in forma di non divergenza è più adatta per i principi di massimo/minimo.

Osservazione 4.1.2 (Ipotesi di simmetria)**.** In tutto il capitolo facciamo l'ipotesi che sia soddisfatta la condizione di simmetria:

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad \forall i, j = 1, ..., n, \quad \forall x \in \Omega$$

Questa condizione non è sicuramente restrittiva se per esempio consideriamo $u \in C^2(\Omega)$ o semplicemente differenziabile al second'ordine in senso debole in Ω. Grazie alla condizione di simmetria, possiamo dire che la matrice dei coefficienti

$$A(x) = \left[a_{ij}(x)\right]_{ij} \in \mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}) \subset M_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad \forall x \in \Omega.$$

Quindi $A(x)$ ha autovalori reali $\lambda_1(x) \le \lambda_2(x) \le \ldots \le \lambda_n(x)$.

Come abbiamo visto in §2.5, l'ipotesi di simmetria viene usata per definire il tipo qualitativo dell'operatore L. La prossima definizione è parzialmente un richiamo.

Definizione 4.1.2. L'operatore differenziale del secondo ordine L (in forma di divergenza o non) si dice:

(a) *ellittico in* $x_0 \in \Omega$ se la matrice $A(x_0)$ è definita positiva, ovvero se $\lambda_i(x_0) > 0$ per ogni $i = 1, ..., n$. Questa condizione è equivalente all'affermazione

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x_0)\xi_i\xi_j > 0 \quad \forall \xi \neq 0, \tag{4.1.4}$$

oppure semplicemente $\lambda_1(x_0) > 0$;

(b) *ellittico in* Ω se è ellittico in x_0 per ogni $x_0 \in \Omega$;

(c) *uniformemente ellittico in* Ω se esiste una costante $\vartheta > 0$ tale che

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \vartheta|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Questa condizione è equivalente a $\lambda_1(x) \geq \vartheta > 0$ per ogni $x \in \Omega$.

Esempio 4.1.1. $L = -\Delta$ ha entrambe le forme (4.1.2) e (4.1.3) ed è uniformente ellittico su ogno aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Infatti $A(x) = I$ per ogni x e abbiamo $\vartheta = 1$.

Osservazione 4.1.3. L'ellitticità di L dipende solo da $A(x)$. Inoltre, è detto anche ellittico un operatore per cui il suo negativo soddisfa la condizione di ellitticità. La scelta del segno nelle definizioni sarà chiarita in seguito, ma per adesso ci limiteremo a notare che con la scelta fatta qui, i segni nella formulazione delle soluzioni deboli saranno più gradevoli.

Osservazione 4.1.4. Anche se tratteremo il caso generale, cercando di precisare le ipotesi minimali sui coefficienti $\{a_{ij}, b_i, c\}$, si possono considerare casi particolari per semplificare i conti. Ad esempio, $A = I$ oppure $b, c = 0$.

4.2 Esistenza di soluzioni deboli

Consideriamo il problema di Dirichlet già enunciato in (4.1.1), ovvero

$$\text{(PD)} \quad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ ed L in forma di divergenza (4.1.3), ovvero

$$\text{(DF)} \quad Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}D_iu) + \sum_{i=1}^{n} b_iD_iu + cu.$$

Facciamo le seguenti ipotesi:

(H1) $a_{ij} = a_{ji}$ per $i, j = 1, \dots n$;

(H2) $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$;

(H3) $f \in L^2(\Omega)$.

Inoltre, L gode di una qualche proprietà di ellitticità che determineremo di volta in volta. Cerchiamo una soluzione $u \in H_0^1(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$ in forma debole secondo la seguente definizione.

Definizione 4.2.1. Una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ è detta *soluzione debole di (PD)* se

$$B[u,v] = \int_\Omega fv\,dx = (f,v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{4.2.1}$$

dove

$$B[u,v] = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}D_iuD_jv + \sum_{i=1}^n b_iD_iuv + cuv\right]dx \tag{4.2.2}$$

è la *forma bilineare* associata ad L.

Esempio 4.2.1. Nel caso $L = -\Delta$ con $b = 0, c = 0$ abbiamo

$$\int_\Omega Du \cdot Dv\,dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

come nel Capitolo 3.

Anche nel caso generale, se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ soddisfa $Lu = f$ in Ω e $u = 0$ su $\partial\Omega$, si ottiene la relazione (4.2.1) integrando per parti; cioè soluzioni classiche sono soluzioni deboli. Inoltre, per verificare la condizione (4.2.1) basta andare a testare contro ogni $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Questo fatto è dovuto alla continuità della forma bilineare, che sarà stabilita fra breve, e la densità di $C_0^\infty(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$.

4.2.1 Esistenza tramite il lemma di Lax-Milgram

L'idea di base per mostrare l'esistenza di soluzioni deboli, usando la definizione che abbiamo appena dato, è quella di utilizzare il lemma di Lax-Milgram. Dunque ci serve che la forma bilineare B sia *continua* e *coerciva* e che il funzionale lineare associato al membro destro di (4.2.1) sia *continuo*. La continuità della forma lineare e della forma bilineare sono richieste sempre soddisfatte.

Lemma 4.2.1. *Per ogni $f \in L^2(\Omega)$, il funzionale lineare $l_f : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definito da*

$$l_f(v) := (f,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega fv\,dx$$

è continuo, cioè $l_f \in \left[H_0^1(\Omega)\right]' := H^{-1}(\Omega)$.

Dimostrazione. Sicuramente, poichè $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, allora l_f è ben definito. Inoltre è ovviamente lineare. Infine mostriamo che è limitato.

$$\begin{aligned} |l_f(v)| &\leq \int_\Omega |f|\,|v|dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_P\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

dove si è usata la disuguaglianza di Poincarè nell'ultima riga. □

Lemma 4.2.2. *La forma bilineare $B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definita in (4.2.2) è continua, cioè esiste una costante $C = C(\Omega, \|a_{ij}\|_{L^\infty}, \|b_i\|_{L^\infty}, \|c\|_{L^\infty})$ tale che*

$$|B[u,v]| \leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.2.3}$$

Osserviamo che dalla stima di limitatezza (4.2.3) segue anche

$$|B[u,v]| \leq \frac{C}{2}\left(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

che è l'affermazione di continuità.

Dimostrazione. Prendiamo $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ e poi potremo estenderci grazie alla densità di $C_0^\infty(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
|B[u,v]| &\leq \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|\,|D_i u|\,|D_j v| + \sum_{i=1}^n |b_i|\,|D_i u|\,|v| + |c|\,|u|\,|v|\right] dx \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}\|Du\|_{L^2(\Omega)}\|Dv\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}\|Du\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|c\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C(\|Du\|_{L^2(\Omega)}\|Dv\|_{L^2(\Omega)} + \|Du\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C(1 + C_P + C_P^2)\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

Ora ricordiamo il Lemma di Lax-Milgram dal corso di Analisi Reale.

Lemma 4.2.3 (di Lax-Milgram)**.** *Sia $(H, \|\cdot\|)$ uno spazio di Hilbert. Sia $B : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineare tale che*

(i) esiste $\alpha > 0$ tale che $|B[u,v]| \leq \alpha\|u\|\,\|v\|$ per ogni $u, v \in H$ (continuità di B);

(ii) esiste $\beta > 0$ tale che $B[u,u] \geq \beta\|u\|^2$ per ogni $u \in H$ (coercività di B).

Allora per ogni $f \in H'$ esiste un unico elemento $u \in H$ tale che

$$B[u,v] = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H.$$

Quindi nella definzione di soluzione debole, cerchiamo $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$B[u,v] = l_f(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

dove B è bilineare e continua e l_f è lineare e continuo per il Lemma 4.2.1 ed il Lemma 4.2.2. Allora rimane solo la coercività di B. Per questo ci servirà la seguente *stima a priori* su B.

Lemma 4.2.4 (disuguaglianza di Gårding)**.**
Sia L un operatore differenziale del secondo ordine uniformemente ellittico in forma di divergenza con coefficienti $L^\infty(\Omega)$. Allora esistono due costanti $\beta > 0$ e $\gamma \geq 0$ tali che

$$\text{(G)} \quad \beta\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq B[u,u] + \gamma\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^1_0(\Omega)$$

o equivalentemente

$$B[u,u] \geq \beta\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \gamma\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^1_0(\Omega)$$

Dimostrazione. Grazie all'uniforme ellitticità si ha

$$\begin{aligned}
\vartheta \int_\Omega |Du|^2 dx &\leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i u D_j u \, dx \\
&= B[u,u] - \sum_{i=1}^n \int_\Omega b_i D_i u u \, dx - \int_\Omega c u^2 \, dx \\
&\leq B[u,u] + \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |Du|\,|u| \, dx + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u|^2 \, dx \quad (|D_i u| \leq |Du|) \\
&\leq B[u,u] + \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \left[\varepsilon \int_\Omega |Du|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega |u|^2 dx \right] + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u|^2 \, dx,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza di Young con ε [1]. Ora possiamo scegliere ε tale che

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} < \frac{\vartheta}{2}.$$

Infatti definendo

$$M := \max\left\{ \sum_{i=1}^n \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}, \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}$$

possiamo prendere

$$\varepsilon := \frac{\vartheta}{4M}.$$

Così otteniamo

$$\frac{\vartheta}{2} \int_\Omega |Du|^2 \, dx \leq B[u,u] + \left(\frac{M^2}{\vartheta} + M \right) \|u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

ovvero la disuguaglianza (G) con

$$\beta = \frac{\vartheta}{2} \quad \text{e} \quad \gamma = M\left(\frac{M}{\vartheta} + 1 \right)$$

□

[1] Cioè $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$ per ogni $a, b, \varepsilon > 0$. È anche detta *disuguaglianza di Cauchy con ε*, dato che stiamo usando $p = q = 2$.

Osservazione 4.2.1 (Caso particolare)**.** Se $b_1, \dots, b_n = 0$ e $c \geq 0$, allora

$$\vartheta \int_\Omega |Du|^2 \, dx \leq B[u,u] - \int_\Omega cu^2 \, dx \leq B[u,u].$$

Quindi abbiamo (G) con $\beta = \vartheta$ e $\gamma = 0$. In particolare, B risulta coercivo.

In generale, L soddisfa la disuguaglianza di Gårding con $\gamma > 0$. In tal caso L non risulta coercivo, ma una perturbazione semplice di L lo è.

Teorema 4.2.1 (Primo teorema di esistenza e unicità di soluzioni deboli)**.** *Siano $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e L un operatore differenziale del secondo ordine, uniformemente ellittico ed in forma di divergenza con coefficienti $L^\infty(\Omega)$. Esiste una costante $\gamma \geq 0$ tale che per ogni $\mu \geq \gamma$ e per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esista un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Inoltre, per ogni $\mu \geq \gamma$ la mappa di soluzione $S_\mu : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ definita da $u = S_\mu(f)$ è lineare e continua. [2]

Dimostrazione. Prendiamo γ e β come nella disuguaglianza di Gårding (G) e sia $\mu \geq \gamma$. Definiamo

$$B_\mu[u,v] = B[u,v] + \mu(u,v)_{L^2} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

La forma B_μ è la forma bilineare associata all'operatore $L_\mu = L + \mu I$.

- Mostriamo che B_μ è continua.

$$\begin{aligned} |B_\mu[u,v]| &\leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \mu\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \alpha_\mu \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

- Mostriamo che B_μ è coerciva.

$$\begin{aligned} B_\mu[u,u] &\geq \beta\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \gamma\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \mu\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \beta\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

  poichè $\mu \geq \gamma$.

Dunque la forma B_μ soddisfa le ipotesi del teorema di Lax-Milgram e dunque esiste una sola $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$B_\mu[u,v] = (f,v)_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

[2] La continuità di S_μ non è stata nominata esplicitamente nell'Anno Accademico 2011-2011.

e quindi esiste una sola soluzione debole.
Usando la definizione di soluzione debole se vede facilmente che la mappa di soluzione S_μ è lineare e per ogni $f \in L^2(\Omega)$ la soluzione $u = S_\mu(f)$ soddisfa

$$\beta\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq B_\mu[u,u] \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P\|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|u\|_{H^1_0(\Omega)},$$

e quindi

$$\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{C_P}{\beta}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

Corollario 4.2.1. *Nel caso particolare dell'Osservazione 4.2.1, esiste un'unica soluzione $u = u_\mu \in H^1_0(\Omega)$ del problema (4.2.4) per ogni $\mu \geq 0$.*

Osservazione 4.2.2. Nell'enunciato del Teorema 4.2.1, l'ipotesi $f \in L^2(\Omega)$ viene usata solo per mostrare che il funzionale lineare associato l_f è continuo su $H^1_0(\Omega)$. Allora è evidente la seguente generalizzazione: *per ogni $f \in H^{-1}(\Omega) = \left[H^1_0(\Omega)\right]'$ esiste un unica $u \in H^1_0(\Omega)$ soluzione di (4.2.4) nel senso che*

$$B[u,v] = \langle f, v\rangle\,, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

dove $\langle f, v\rangle$ è il valore di f applicato a v. Una caratterizzazione concreta del duale $H^{-1}(\Omega)$ di $H^1_0(\Omega)$ è il seguente: *$f \in H^{-1}(\Omega)$ se e solo se esistono $f_0, f_1, \dots f_n \in L^2(\Omega)$ tali che*

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega \left(f_0 v + \sum_{i=1}^n f_i D_i v \right) dx \quad \forall\, v \in H^1_0(\Omega).$$

Quindi "$f = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i D_i f$". (v. Teo. 5.9.1 di Evans [5]).

Corollario 4.2.2 (Isomorfismo tra H^1_0 e il suo duale H^{-1})**.** *Siano γ e μ come nel Teorema 4.2.1. Allora l'operatore*

$$L_\mu := L + \mu I : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

è un isomorfismo per ogni $\mu \geq \gamma$. In particolare, $-\Delta : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ è un isomorfismo.

Dimostrazione. Per il Teorema 4.2.1 e l'Osservazione 4.2.2 abbiamo che L_μ è biettiva per ogni $\mu \geq \gamma$. Serve solo la continuità di L_μ e L_μ^{-1}. È facile la stima di continuità per $u \in C^\infty_0(\Omega)$ e poi la continuità di L_μ segue per la densità di $C^\infty_0(\Omega)$ in $H^1_0(\Omega)$. Tramite il teorema della mappa aperta, L_μ risulta continuo. □

4.2.2 Esistenza tramite la teoria di Fredholm

Abbiamo visto che nel caso in cui la disuguaglianza di Gårding per L è soddisfatta con $\gamma \geq 0$, abbiamo esistenza ed unicità della soluzione debole per il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

per ogni $\mu \geq \gamma$.

Domanda: Cosa succede nel caso in cui $\mu < \gamma$?

Risposta: Può mancare l'esistenza e può mancare l'unicità.

Esempio 4.2.2. Sia $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$. Sappiamo che l'operatore $-\Delta$ soddisfa (G) con $\gamma = 0$ e quindi consideriamo l'operatore $L = -\triangle + \mu I$ con $\mu < 0$.

- Per $\mu_k = -2k^2$ con $k \in \mathbb{N}$ si può verificare che le funzioni

  $$u_k = \sin(kx)\sin(ky) \in H_0^1(\Omega)$$

  sono soluzioni non banali del problema

  $$\begin{cases} -\triangle u_k + \mu_k u_k = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases},$$

  ovvero, le u_k sono autofunzioni associate all'autovalore μ_k. Quindi per $\mu < 0$ si può perdere l'unicità di soluzioni deboli. Ad ogni soluzione particolare u_f del problema con termine noto f, $u_f + u_k$ sarà un'altra soluzione.

- Per $\mu_1 = -2$, esistono $f \in L^2(\Omega)$ tali che non esiste $u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione debole di $-\Delta u - 2u = f$. Ad esempio, possiamo prendere $f = u_1$ un autofunzione. Vedremo dopo il perchè.

Osservazione 4.2.3. Una risposta completa viene fornita tramite la *proprietà di Fredholm* e *l'operatore aggiunto ad L* trattati nel corso di Analisi Funzionale.

Per farci un'idea di cosa ci servirà, consideriamo un problema analogo in dimensione finita, ovvero un risultato di algebra lineare.

Esempio 4.2.3. Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una mappa lineare e quindi limitata sullo spazio euclideo finito dimensionale. Per $y \in \mathbb{R}^n$ fisso, consideriamo l'equazione nell'incognita x:

$$Tx = y. \tag{4.2.5}$$

Ci sono due possibilità:

I. T è iniettiva e quindi biettiva. Quindi per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ esiste ed è unica la soluzione x.

II. T non è iniettiva e quindi non suriettiva. In questo caso ci sono solo due possibilità per le soluzioni di (4.2.5):

- $y \in R(T)$. Quindi esiste x con $Tx = y$ ma non sarà unica. Basta aggiungere ad x un qualsiasi $x_0 \neq 0$ tale che $Tx_0 = 0$.
- $y \in R(T)^\perp$, ovvero $\langle y, Tx\rangle = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Quindi abbiamo

$$0 = \langle y, Tx\rangle = \langle T^t y, x\rangle\,, \quad \forall\, x \in R^n$$

e quindi $T^t y = 0$, ovvero $y \in \ker(T^t)$.

In conclusione, esiste una soluzione solo se $y \in \ker(T^t)^\perp$.

Osservazione 4.2.4. In uno spazio di Hilbert H infinito dimensionale, questa alternativa I o II risulta vera per operatori $T : H \to H$ della forma $T = I - K$ con $K : H \to H$ *compatto*, cioè lineare, limitato che manda insiemi limitati in insiemi precompatti.

Prima di enunciare il risultato principale, abbiamo bisogno di introdurre gli oggetti aggiunti che prenderanno il posto di T^t nell'esempio finito dimensionale.

Definizione 4.2.2. Sia L un operatore differenziale definito da

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}D_i u) + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i u + cu$$

con coefficienti abbastanza regolari e $a_{ij} = a_{ji}$. *L'aggiunto formale di L in Ω* è l'operatore differenziale L^* definito implicitamente da

$$(L^* v, u)_{L^2(\Omega)} = (v, Lu)_{L^2(\Omega)}\,, \quad \forall\, u, v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Osservazione 4.2.5 (Proprietà di L^*)**.**

a) Se, ad esempio, $b_i \in C^1(\overline{\Omega})$ per ogni $i = 1, \dots, n$, [3], allora

$$L^* v = -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}D_j v) - \sum_{i=1}^{n} b_i D_i v + \left(c - \sum_{i=1}^{n} D_i b_i\right) v. \tag{4.2.6}$$

Infatti basta integrare per parti.

[3] In realtà basterebbe che esistono le derivate deboli $D_i b_i$ in $L^\infty(\Omega)$ per ogni i.

b) La forma bilineare B^* associata ad L^* soddisfa

$$B^*[v,u] = B[u,v]\,, \quad \forall\, u,v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Infatti si ha $B^*[v,u] := (L^*v,u)_{L^2(\Omega)} = (v,Lu)_{L^2(\Omega)} = B[u,v]$.

c) È evidente che $B^* : C_0^\infty(\Omega)\times C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ soddisfa la stima

$$|B^*[v,u]| \le C\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Per la densità di $C_0^\infty(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$, esiste un prolugamento continuo

$$B^* : H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}.$$

Definizione 4.2.3. Diciamo che $v \in H_0^1(\Omega)$ è una *soluzione debole del problema aggiunto*

$$(\mathrm{PD})^* \quad \begin{cases} L^*v = f & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

se

$$B^*[v,u] = (f,u)_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Teorema 4.2.2 (Alternativa di Fredholm per L)**.** *Siano $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e L un operatore differenziale del secondo ordine, uniformemente ellittico ed in forma di divergenza con coefficienti $L^\infty(\Omega)$. Vale una e una sola delle affermazioni seguenti:*

I. *Per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica soluzione debole u del problema di Dirichlet*

$$(\mathrm{PD}) \quad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

II. *Esiste $u \neq 0$ in $H_0^1(\Omega)$ soluzione debole del problema di Dirichlet omogeneo*

$$(\mathrm{PD})_0 \quad \begin{cases} Lu = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Inoltre in questo secondo caso:

(a) la dimensione dello spazio N delle soluzioni deboli del problema omogeneo $(\mathrm{PD})_0$ è finita e uguale alla dimensione dello spazio N^* delle soluzioni deboli del problema omogeneo aggiunto $(\mathrm{PD})^*$;

(b) il problema di Dirichlet non omogeneo ammette soluzione debole u se e solo se $(f,v)_{L^2(\Omega)} = 0$ per ogni $v \in N^*$.

Dimostrazione.
Passo 1: (Riscrivere il problema (PD) tramite l'inversa dell'operatore $L_\gamma = L + \gamma I$)

1. Prendiamo $\gamma = \mu$ come nel Teorema 4.2.1 e abbiamo

$$\forall\, g \in L^2(\Omega) \quad \exists!\, w \in H_0^1(\Omega) \quad \text{tale che } Lw + \gamma w = g,$$

nel senso che w è l'unico elemento di $H_0^1(\Omega)$ tale che

$$B_\gamma[w,v] := B[w,v] + \gamma(w,v)_{L^2(\Omega)} = (g,v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.2.7}$$

2. Definiamo $L_\gamma^{-1} g := w$ dove w soddisfa (4.2.7). Così abbiamo definito un operatore di soluzione

$$L_\gamma^{-1}(\Omega) : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega),$$

usando anche l'immersione compatta di Rellich-Kondachov.

3. Ora osserviamo che u è una soluzione debole del problema di Dirichlet (PD) se e solo se per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} B[u,v] = (f,v)_{L^2(\Omega)} &\Leftrightarrow B_\gamma[u,v] := B[u,v] + \gamma(u,v)_{L^2(\Omega)} = (f + \gamma u, v)_{L^2(\Omega)} \\ &\Leftrightarrow u = L_\gamma^{-1}(\gamma u + f) \\ &\Leftrightarrow u = \gamma L_\gamma^{-1} u + L_\gamma^{-1} f. \end{aligned}$$

Poniamo

$$K = \gamma L_\gamma^{-1} \quad h = L_\gamma^{-1} f$$

Dunque abbiamo che $u \in H_0^1$ è una soluzione debole se e solo se

$$u - Ku = h \Leftrightarrow (I - K)u = h. \tag{4.2.8}$$

Passo 2: (Compattezza dell'operatore $K = \gamma L_\gamma^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$)

1. È evidente che K è ben definito e lineare.

2. K è limitato. Infatti applicando la disuguaglianza di Gårding a B_γ esite $\beta > 0$ tale che

$$\begin{aligned} \beta\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq B_\gamma[w,w] \\ &= (g,w)_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_P\|g\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

ovvero

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_P}{\beta}\|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ma $w = L_\gamma^{-1} g = \gamma^{-1}\gamma L_\gamma^{-1} g = \gamma^{-1} Kg$. In definitiva

$$\|Kg\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_P \gamma}{\beta} \|g\|_{L^2(\Omega)},$$

e dunque K è limitato.

3. Abbiamo $K : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ usando il teorema di Rellich-Kondrachov. Quindi K è compatto.

Passo 3: (Applicare l'alternativa di Fredholm all'operatore $T = I - K$) Ricordiamo l'altenativa di Fredholm in versione astratta (v. l'Appendice D di Evans [5]).

Lemma 4.2.5 (Alternativa di Fredholm)**.** *Sia $K : H \to H$ un operatore compatto su uno spazio di Hilbert. Allora l'operatore $T := I - K$ è un operatore di Fredholm* [4]*. In particolare*

(a) $N(I-K)$ *ha dimensione finita*

(b) $R(I-K)$ *è chiuso.*

(c) $R(I-K) = [N(I-K^*)]^\perp$.

(d) $N(I-K) = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad R(I-K) = H$.

(e) $\dim[N(I-K)] = \dim[N(I-K^*)]$.

La dimostrazione del Teorema segue facilmente dal Lemma 4.2.5.

- Le proprietà (c) - (e) forniscono l'alternativa:

  I. $N(I-K) = \{0\}$. Quindi $R(I-K) = H$ e abbiamo: per ogni $h \in L^2(\Omega)$ esiste ed è unica $u \in L^2(\Omega)$ tale che

  $$u - Ku = h.$$

  Per $h = L_\gamma^{-1} f \in H_0^1(\Omega)$ abbiamo un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ di $Lu = f$ usando (4.2.8).

  II. $N(I-K) \neq \{0\}$. Quindi abbiamo una soluzione $u \neq 0$ in $L^2(\Omega)$ dell'equazione $u - \gamma L_\gamma^{-1} u = 0$. Quindi $\gamma \neq 0$ e $\frac{1}{\gamma} u = L_\gamma^{-1} u$, ovvero $u \in H_0^1(\Omega)$ e

  $$L\left(\frac{1}{\gamma} u\right) + \gamma\left(\frac{1}{\gamma} u\right) = u.$$

  Quindi $u \neq 0$ in $H_0^1(\Omega)$ è soluzione del problema omogeneo $(\mathrm{PD})_0$; cioè

  $$u \in N(I-K) \quad \Leftrightarrow \quad u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{è soluzione di } (\mathrm{PD})_0.$$

[4] T è detto *operatore di Fredholm* se $N(T)$ ha dimensione finita e $R(T)$ è un chiuso di codimensione finita.

- Inoltre nel caso II, usando la proprietà (e) abbiamo $\dim[N(I-K)] = \dim[N(I-K^*)]$. In particolare, $N(I-K^*) \neq \{0\}$ e quindi esiste una soluzione $v \neq 0$ in $L^2(\Omega)$ dell'equazione $v - K^*v = 0$. Usando lo stesso argomento del punto precedente, si mostra che $v \in H_0^1(\Omega)$ è soluzione debole di $(\mathrm{PD})_0^*$. Quindi abbiamo l'affermazione (a) del caso II.

- Infine nel caso II, abbiamo $R(I-K) = [N(I-K^*)]^\perp$, ovvero per ogni $h \in L^2(\Omega)$ esiste soluzione $u \in L^2(\Omega)$ dell'equazione $u - Ku = h$ se e solo se

$$(h, v)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{per ogni } v \text{ tale che } v - K^*v = 0.$$

  Combinando questo con il Passo 1, abbiamo che $u \in H_0^1(\Omega)$ è soluzione debole di $Lu = f$ se e solo se

$$(L_\gamma^{-1} f, v)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{per ogni } v \text{ tale che } v - K^*v = 0,$$

  ma

$$\begin{aligned}(L_\gamma^{-1} f, v)_{L^2(\Omega)} &= \left(\frac{1}{\gamma} Kf, v\right)_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\gamma}(f, K^*v)_{L^2(\Omega)} \\ &= \frac{1}{\gamma}(f, v)_{L^2(\Omega)} \text{ se } v - K^*v = 0.\end{aligned}$$

  Quindi abbiamo l'affermazione (b) nel caso II.

□

4.2.3 Esistenza e lo spettro reale di L

Completiamo il discorso sull'esistenza delle soluzioni deboli con un terzo risultato formulato con un *parametro spettrale*. Enunciamo subito il risultato per poi passare a qualche osservazione ed all'idea della dimostrazione.

Teorema 4.2.3 (Esistenza e unicità di soluzioni deboli e lo spettro reale di L)**.** *Siano $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e L un operatore differenziale del secondo ordine, uniformemente ellittico ed in forma di divergenza con coefficienti $L^\infty(\Omega)$. Allora*

(a) Esiste un insieme $\Sigma \subset \mathbb{R}$ al più numerabile, detto spettro reale di L, tale che il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f + \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

abbia un'unica soluzione debole per ogni $f \in L^2(\Omega)$ se e soltanto se $\lambda \notin \Sigma$.

(b) Se Σ è infinito, allora $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ con $\lambda_k \to +\infty$.

Osservazione 4.2.6. Confrontando il Teorema 4.2.3 con i Teoremi 4.2.1 e 4.2.2 possiamo affermare:

(a) Tramite la teoria di Lax-Milgram e la disuguaglianza di Gårding, sappiamo che abbiamo esistenza ed unicità se $\lambda \leq -\gamma$; cioè lo spettro reale $\Sigma \subset (-\gamma, +\infty)$.

(b) Tramite la teoria di Fredholm, se $\lambda \in \Sigma$, allora il problema di Dirichlet per l'equazione $Lu - \lambda u = f$ non ha una soluzione debole unica per ogni $f \in L^2(\Omega)$. Quindi, siamo nel caso II per l'operatore $L - \lambda I$, ovvero esiste $u \neq 0$ in $H_0^1(\Omega)$ soluzione debole del problema

$$\text{(EVP)} \quad \begin{cases} Lu = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ovvero, $\{\lambda, u\}$ è una coppia di autovalore-autofunzione debole di L rispetto alla condizione di Dirichlet omogenea su $\partial\Omega$ nel senso che

$$B[u, v] = \lambda(u, f)_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Dimostrazione. 1. Per l'alternativa di Fredholm (Teorema 4.2.2) applicata all'operatore $L - \lambda I$, $\lambda \in \Sigma$ se e solo se esiste una soluzione $u \neq 0$ in $H_0^1(\Omega)$ di (EVP).

2. Una soluzione di (EVP) è $u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione dell'equazione

$$(L + \gamma I)u = (\gamma + \lambda)u$$

con $\gamma \geq 0$ il parametro di Gårding per L (WLOG $\gamma > 0$). Questo vale esattamente quando

$$u = L_\gamma^{-1}\left((\gamma + \lambda)u\right) = \frac{\gamma + \lambda}{\gamma} Ku$$

dove abbiamo posto

$$K = \gamma L_\gamma^{-1}.$$

Cioè $\lambda \in \Sigma$ se e solo se esiste un'autofunzione $u \neq 0$ in $L^2(\Omega)$ associata all'autovalore $\gamma/(\gamma + \lambda)$ dell'operatore compatto $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$

3.

Lemma 4.2.6. *Sia $K : H \to H$ un operatore compatto su H uno spazio di Hilbert infinito dimensionale. Allora*

(a) $0 \in \sigma(K) := \{\mu :\ K - \mu I \quad$ *non ha inversa continua*$\}$*, lo spettro di K.*

(b) $\sigma(K) \setminus \{0\}$ *è formato di solo autovalori di K.*

(c) Ci sono tre possibilità:

(i) $\sigma(K) = \{0\}$;

(ii) $\sigma(K)$ *è un insieme finito;*

(iii) $\sigma(K) = \{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *una successione infinita di autovalori aventi* 0 *come punto di accumulazione.*

Per la dimostrazione, v. Evans [5] - Teorema 6 dell'appendice D.5.

4. Quindi, se Σ è infinito, siamo nel caso (iii) del Lemma per K che avrà autovalori $\mu_k = \gamma/(\gamma + \lambda_k)$ con $\lambda_k \to +\infty$ per $k \to +\infty$.

□

Osservazione 4.2.7. Torneremo alla questione della teoria spettrale per L nel paragrafo 4.5 usando delle ipotesi più forti sulla struttura di L e sfruttando anche l'ulteriore regolarità delle soluzioni che sarà presentata nel paragrafo 4.3.

Concludiamo questo paragrafo notando la continuità dell'operatore di soluzioni per il problema di Dirichlet. [5]

Teorema 4.2.4 (Dipendenza continua della soluzione debole sul termine noto)**.** *Siano* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *e* L *un operatore differenziale del secondo ordine, uniformemente ellittico ed in forma di divergenza con coefficienti* $L^\infty(\Omega)$*. Se* $\lambda \notin \Sigma$ *allora esiste una costante* $C = C(\lambda, \Omega, L)$ *tale che*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

dove $u = (L - \lambda I)^{-1} f \in H_0^1(\Omega)$ *è l'unica soluzione debole del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f + \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con $f \in L^2(\Omega)$*; cioè risulta ben definito e continuo l'operatore di soluzione*

$$(L - \lambda I)^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega).$$

Dimostrazione. 1. Se no, esisterebbe una successione $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ tale che

$$\|u_k\|_{L^2(\Omega)} > k\|f_k\|_{L^2(\Omega)},$$

dove $u_k = (L - \lambda I)^{-1} f_k \in H_0^1(\Omega)$.

2. Normalizzando la successione di soluzioni per avere $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$ per ogni k (basta dividere per $\|u_k\|_{L^2(\Omega)}$), otteniamo

$$\|f_k\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{per } k \to +\infty.$$

[5] Il risultato è facoltativo per l'anno accademico 2010-2011.

3. La successione $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata in $H_0^1(\Omega)$. Infatti, applicando la disuguaglianza di Gårding all'operatore $L_\lambda = L - \lambda I$ otteniamo

$$\begin{aligned}\beta\|u_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq B_\lambda[u_k, u_k] + \gamma\|u_k\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= (f_k, u_k)_{L^2(\Omega)} + \gamma \leq M\end{aligned}$$

per qualche costante M.

4. Quindi possiamo estrarre una sottosuccessione $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\begin{cases} u_{k_j} \rightharpoonup u & \text{in } H_0^1(\Omega) \\ u_{k_j} \to u & \text{in } L^2(\Omega) \end{cases}$$

Ma allora

$$-\lambda(u_{k_j}, v)_{L^2(\Omega)} + B[u_{k_j}, v] = (f_{k_j}, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

e passando al limite per $j \to +\infty$ otteniamo

$$-\lambda(u, v)_{L^2(\Omega)} + B[u, v] = 0 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

ovvero u è una soluzione debole di (EVP). Ma dato che $\lambda \notin \Sigma$, dovremmo avere $u = 0$. Questo è assurdo perchè $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

□

4.3 Regolarità delle soluzioni deboli

Ci poniamo ora il problema della regolarità delle soluzioni deboli. Più precisamente, data $u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione debole di

$$\text{(PD)} \quad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con L in forma di divergenza ed uniformemente ellittico e $f \in L^2(\Omega)$, possiamo affermare che u ammette derivate deboli di ordine superiore? Possiamo stabilire quando le soluzioni devono essere addirittura classiche, cioè

1. $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$?
2. $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$?

Osservazione 4.3.1. In generale, se assumiamo inoltre che $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, vedremo che $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$ ma che ulteriore regolarità richiede delle ipotesi in più sulla regolarità di f, Ω ed i coefficienti di L. La strategia è:

1. sfruttare l'ellitticità ;
2. fare una localizzazione tramite delle partizioni dell'unità;
3. studiare dei *rapporti incrementali*.

Cominciamo con la definzione dei rapporti incrementali.

Definizione 4.3.1. Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$, $h \in \mathbb{R}$ tale che $0 < |h| < d(\Omega', \partial\Omega)$ e $k \in \{1, \dots, n\}$. E' detto *k-esimo rapporto incrementale di passo h* la quantità

$$D_k^h u(x) = \frac{u(x + he_k) - u(x)}{h} \quad \forall x \in \Omega'$$

Denotiamo inoltre con $D^h u = \left(D_1^h u, D_2^h u, ..., D_n^h u\right)$.

Notiamo che sono ben definiti i rapporti incrementali perchè gli spazi di Sobolev sono spazi vettoriali ed abbiamo lo spazio necessario in Ω' scegliendo il passo h abbastanza piccolo. Il seguente lemma fornisce lo strumento principale per guadagnare delle derivate deboli in più.

Lemma 4.3.1 (Derivate deboli e rapporti incrementali)**.** *Sia $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$.*

(a) Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Allora per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$, per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $0 < |h| < d(\Omega', \partial\Omega)$ e per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\|D_k^h u\|_{L^2(\Omega')} \leq \|D_k u\|_{L^2(\Omega)}.$$

(b) Siano $u \in L^2(\Omega)$ e $k \in \{1, \dots, n\}$. Se esiste una costante $M > 0$ tale che

$$\|D_k^h u\|_{L^2(\Omega')} \leq M \tag{4.3.1}$$

per ogni h tale che $0 < |h| < d(\Omega', \partial\Omega)$, allora esiste la derivata debole $D_k u \in L^2(\Omega')$ e vale

$$\|D_k u\|_{L^2(\Omega')} \leq M.$$

Osservazione 4.3.2. Notiamo che il punto essenziale è che la stima (4.3.1) è uniforme in h piccolo. Inoltre, il risultato è una caso particolare di un risultato più generale. In particolare:

(i) Vale la parte (a) di Lemma 4.3.1 per $p \in [1, \infty)$, non solo $p = 2$. Invece, la parte (b) vale per $p \in (1, \infty)$ (v. Teorema 5.8.3 di Evans [5]).

(ii) Per "promuovere" $u \in W^{m,p}(\Omega)$ a $W^{m+1,p}(\Omega')$, basta mostrare che i rapporti incrementali $D_k^h D^\alpha u$ sono limitati in $L^p(\Omega')$ per ogni α con $|\alpha| = m$, per ogni $k = 1, \dots, n$ uniformemente per h piccolo.

Dimostrazione. (a) Usiamo la densità di $C^1(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ in $W^{1,2}(\Omega)$. Per $u \in C^1(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ possimo usare il TFCI per scrivere

$$u(x + he_k) - u(x) = h \int_0^1 D_k u(x + the_k) dt, \quad x \in \Omega',\ 0 < |h| < d(\Omega', \partial\Omega).$$

Dunque

$$|u(x + he_k) - u(x)| \leq |h| \int_0^1 |D_k u(x + the_k)| dt$$

$$|D_k^h u(x)| \leq \left(\int_0^1 |D_k u(x + the_k)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|D_k^h u\|^2_{L^2(\Omega')} &= \int_{\Omega'} |D_k^h u|^2 \, dx \\ &\leq \int_{\Omega'} \left(\int_0^1 |D_k u(x + the_k)|^2 \, dt \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\Omega'} |D_k u(x + the_k)|^2 \, dx \right) dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_{\Omega} |D_k u|^2 \, dx \right) dt \\ &= \int_{\Omega} |D_k u|^2 \, dx = \|D_k u\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Per una $u \in W^{1,2}(\Omega)$ generica, prendiamo una successione $\{u_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset C^1(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ tale che $u_j \to u$ in $W^{1,2}(\Omega)$ e passiamo la disuguaglianza al limite.

(b) 1. Sfruttiamo la seguente formula di *integrazione per parti per i rapporti incrementali:* Siano $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$ e h tale che $0 < |h| < d(\Omega', \partial\Omega)$ allora

$$\int_\Omega (D_k^h u)\varphi \, dx = -\int_\Omega u D_k^{-h} \varphi \, dx, \quad u \in L^2(\Omega) \tag{4.3.2}$$

Infatti, per avere

$$\int_{\mathrm{supp}(\varphi)} \frac{u(x + he_k) - u(x)}{h} \varphi(x) \, dx = -\int_\Omega u(x) \frac{\varphi(x - he_k) - \varphi(x)}{-h} \, dx$$

ci basterebbe avere

$$\int_{\mathrm{supp}(\varphi)} \frac{u(x + he_k)\varphi(x)}{h} \, dx = -\int_\Omega u(x) \frac{\varphi(x - he_k)}{-h} \, dx = \int_\Omega u(x) \frac{\varphi(x - he_k)}{h} \, dx.$$

Facendo il cambiamento di variabili $y = x + he_k$, vediamo che ci serve

$$\int_{\{y:\ y - he_k \in \mathrm{supp}(\varphi)\}} \frac{u(y)\varphi(y - he_k)}{h} \, dy = \int_{\{x:\ x - he_k \in \mathrm{supp}(\varphi)\}} \frac{u(x)\varphi(x - he_k)}{h} \, dx,$$

e quindi vale la formula (4.3.2).

2. Usando l'ipotesi
$$\sup_{\{h:\ 0<|h|<d(\Omega',\partial\Omega)\}} \|D_k^{-h}u\|_{L^2(\Omega')} \leq M$$
possiamo affermare l'esistenza di una successione $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ed un elemento $v_k \in L^2(\Omega')$ tali che (v. Teorema 2.6.6 di [11]):
$$h_j \to 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \quad \text{e} \quad D_k^{-h_j}u \rightharpoonup v_k \quad \text{in } L^2(\Omega').$$
Ma allora
$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} uD_k\varphi\,dx &= \int_{\Omega} uD_k\varphi\,dx \quad \operatorname{supp}(\varphi) \subset\subset \Omega' \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_{\Omega} uD_k^{h_j}\varphi dx \\ &= \lim_{j\to\infty} \left(-\int_{\Omega'} \left(D_k^{-h_j}u\right)\varphi\,dx \right) \quad \text{(4.3.2) e } \operatorname{supp}(\varphi) \subset\subset \Omega' \\ &= -\int_{\Omega'} v_k\varphi\,dx.\end{aligned}$$
Dunque esiste la derivata debole $D_k u \in L^2(\Omega')$ ed è v_k. Inolte la stima $\|D_k u\|_{L^2(\Omega')} \leq M$ è conseguenza diretta dal fatto che $D_k u$ è il limite debole della successione $D_k^{-h_j}u$ limitata in norma da M.

□

Adesso siamo pronti per i risultati di regolarità. Il primo risultato richiede solo qualche regolarità in più dei coefficienti di ordine superiore di L.

Teorema 4.3.1 (Regolarità interna in H^2)**.** *Sia $u \in H^1(\Omega)$ soluzione debole di $Lu = f$ in Ω con L un operatore uniformemente ellittico in forma di divergenza. Supponiamo inoltre che*
$$\begin{aligned}&\textit{(H1)} \quad a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\Omega), \ \ b_i, c \in L^\infty(\Omega) \\ &\textit{(H2)} \quad f \in L^2(\Omega)\end{aligned}$$
Allora $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ e per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ esiste $C = C(\Omega, \Omega', L) > 0$ tale che
$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

Osservazione 4.3.3. Notiamo che

(a) Nel Teorema 4.3.1 non abbiamo imposto una condizione al contorno (ad esempio $u \in H^1_0(\Omega)$), il risultato vale per ogni $u \in H^1(\Omega)$ soluzione debole della PDE.

(b) Essendo $u \in H^2(\Omega') = W^{2,2}(\Omega')$ una soluzione debole della PDE, abbiamo
$$B[u, v] = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in C_0^\infty(\Omega') \subset H^1_0(\Omega),$$

e possiamo integrare per parti una volta per ottenere

$$(Lu, v)_{L^2(\Omega')} = (f, v)_{L^2(\Omega')} \quad \forall\, v \in C_0^\infty(\Omega').$$

Quindi abbiamo $Lu = f$ quasi ovunque in Ω' e abbiamo guadagnato un senso puntuale per le soluzioni.

Dimostrazione. Fissiamo $\Omega' \subset\subset \Omega$.

1. Scegliamo Ω'' tale che $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$ e una funzione cutoff $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega' \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega'' \\ 0 \le \zeta \le 1 & x \in \Omega'' \setminus \Omega' \end{cases}$$

2. Essendo $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione debole di $Lu = f$ abbiamo

$$B[u, v] = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

ovvero

(4.3.3)
$$\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i u D_j v \right] dx = \int_\Omega \left[f - \sum_{i=1}^n b_i D_i u - cu \right] v \, dx := \int_\Omega \tilde{f} v \, dx, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

dove $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$.

3. Per ogni $h \neq 0$ e piccolo e per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$, prendiamo una famiglia di funzioni test $v = v_k^h$ nella forma particolare

(4.3.4)
$$v = -D_k^{-h} \left(\zeta^2 D_k^h u \right) \in H_0^1(\Omega).$$

Inseriamo queste $v = v_k^h$ nella formula (4.3.3) per ottenere una relazione della forma

(4.3.5)
$$A = B,$$

dove

(4.3.6)
$$A = A_k^h = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_i u D_j \left[-D_k^{-h} \left(\zeta^2 D_k^h u \right) \right] \right] dx$$

(4.3.7)
$$B = B_k^h = \int_\Omega \left[f - \sum_{i=1}^n b_i D_i u - cu \right] \left(-D_k^{-h} \left(\zeta^2 D_k^h u \right) \right) dx.$$

4. Stimare A dal basso: *esiste* $C_1 > 0$ *tale che per ogni* $k = 1, \dots, n$ *e per ogni* $h \neq 0$ *piccolo si ha*

$$A \geq \frac{\vartheta}{2} \int_\Omega \zeta^2 \left| D_k^h Du \right|^2 \, dx - C_1 \int_\Omega |Du|^2 \, dx. \tag{4.3.8}$$

Infatti, stimiamo come nella disuguaglianza di Gårding dove ϑ è la costante di ellitticità uniforme, usando le proprietà

(i) $D_j(D_k^h w) = D_k^h(D_j w)$ in $L^2(\Omega)$ se $w \in H^1(\Omega)$;

(ii) $D_k^h(vw) = v_k^h D_k^h w + w D_k^h v$ dove $v_k^h(x) := v(x + he_k)$;

(iii) la formula di integrazione per parti per i rapporti incrementali (4.3.2).

Più precisamente, su ogni termine della forma

$$\int_\Omega a_{ij} D_i u \left[D_j \left(D_k^{-h} \left(\zeta^2 D_k^h u \right) \right) \right] dx$$

si usa la (i) per scambiare D_j con D_k^{-h}, poi la (iii) per scaricare D_k^{-h} su $a_{ij} D_i u$ ed infine la (ii) su $D_k^h(a_{ij} D_i u)$ (v. Evans [5] per i dettagli).

5. Stimare B dall'alto: *esiste* $C_2 > 0$ *tale che per ogni* $k = 1, \dots, n$ *e per ogni* $h \neq 0$ *si ha*

$$B \leq |B| \leq \frac{\vartheta}{4} \int_\Omega \zeta^2 \left| D_k^h Du \right|^2 \, dx + C_2 \int_\Omega \left(|f|^2 + |u|^2 + |Du|^2 \right) dx. \tag{4.3.9}$$

Infatti, usiamo la disuguaglianza di Young con ε ed il Lemma 4.3.1. (v. Evans [5] per i dettagli).

6. Combinando (4.3.3), (4.3.8) e (4.3.9) ed usando $A = B \leq |B|$, si ottiene

$$\frac{\vartheta}{4} \int_\Omega \zeta^2 \left| D_k^h Du \right|^2 \, dx \leq (C_1 + C_2) \int_\Omega \left(|f|^2 + |u|^2 + |Du|^2 \right) dx.$$

Poi, usando $\zeta \equiv 1$ su Ω' otteniamo

$$\int_{\Omega'} \left| D_k^h Du \right|^2 \, dx \leq \frac{4(C_1 + C_2)}{\vartheta} \int_\Omega \left(|f|^2 + |u|^2 + |Du|^2 \right) dx \leq M,$$

per ogni $h \neq 0$ piccolo e per ogni $k = 1, \dots, n$. Per il Lemma 4.3.1 esistono le derivate deboli $D_k Du \in L^2(\Omega')$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Quindi $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$ e abbiamo la stima

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C_3 \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right).$$

7. Si può raffinare la stima del passo 6 con $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ al posto di $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ (v. Teorema 6.3.1 di Evans [5]).

□

Osservazione 4.3.4. Ci sono ulteriori risultati di regolarità interna. Ci limiteremo agli enunciati e qualche commento. Si può consultare Evans [5] per ulteriori dettagli. [6]

Teorema 4.3.2 (Regolarità interna superiore)**.** *Sia $f \in H^m(\Omega)$ con $m \in \mathbb{N}_0$, sia $u \in H^1(\Omega)$ soluzione debole di $Lu = f$ con L operatore differenziale del secondo ordine uniformemente ellittico con coefficienti $a_{ij} = a_{ji}, b_i, c \in C^{m+1}(\Omega)$. Allora $u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$ con*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega')} \leq C\left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

Osservazione 4.3.5. La dimostrazione si fa per induzione su m, dove il caso $m = 0$ è il Teorema 4.3.1. In particolare, $u_\alpha := D^\alpha u$ con $|\alpha| = m + 1$ risolve un'equazione della forma $Lu_\alpha = f_\alpha \in L^2(\Omega)$ e si mostra $u_\alpha \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$

Teorema 4.3.3 (Regolarità interna infinita)**.** *Sia $f \in C^\infty(\Omega)$ per ogni $m \in \mathbb{N}_0$, sia $u \in H^1(\Omega)$ soluzione debole di $Lu = f$ con L operatore differenziale del secondo ordine uniformemente ellittico con coefficienti $a_{ij} = a_{ji}, b_i, c \in C^\infty(\Omega)$. Allora $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Osservazione 4.3.6. La dimostrazione è una combinazione del Teorema 4.3.2 e le immersioni di Sobolev.

Teorema 4.3.4 (Regolarità fino al bordo)**.** *Sia $f \in L^2(\Omega)$ con $\partial\Omega \in C^2$, sia $u \in H^1_0(\Omega)$ soluzione debole del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con L operatore differenziale del secondo ordine uniformemente ellittico con coefficienti $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\overline{\Omega})$ e $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$. Allora $u \in H^2(\Omega)$ con

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

Osservazione 4.3.7. La dimostrazione viene fatta in due passi. Il primo passo per il caso particolare di $\Omega = B_r(0) \cap \mathbb{R}^n_+$ con una stima al bordo. Poi, si sfrutta una partizione dell'unità ed un numero finito di diffeomorfismi locali (Ω ha chisura compatta).

4.4 Principi di minimo e di massimo

Obiettivo: Sviluppare degli strumenti per avere un controllo puntuale sulle soluzioni di $Lu = f$ in Ω della forma

$$\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \text{e} \quad \inf_\Omega u = \inf_{\partial\Omega} u$$

[6] Tutti i risultati sono facoltativi per l'anno accademico 2010-2011.

dove L è un operatore differenziale del secondo ordine uniformemente ellittico in forma di non divergenza. La teoria si articola in due casi

1. *Soluzioni classiche* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ dove il sup, inf sono in realtà un max, min.
2. *Soluzioni deboli* $u \in H^1(\Omega)$ dove i sup, inf sono in realtà un ess sup, ess inf.

Inoltre, vedremo che il segno del coefficiente c di ordine zero gioca un ruolo fondamentale.

4.4.1 Principio di massimo per soluzioni classiche

Siano $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ un aperto, eventualmente connesso e L un operatore differenziale del secondo ordine uniformemente ellittico in forma di non divergenza, cioè

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i u + cu$$

dove

(i) $a_{ij} = a_{ji} \in C^0(\Omega), b_i, c$ limitate;

(ii) esiste $\vartheta > 0$ tale che $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \vartheta|\xi|^2$ per ogni $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Iniziamo con il seguente Lemma fondamentale.

Lemma 4.4.1. *Sia* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *tale che*

$$\begin{cases} Lu < 0 & \text{in } \Omega \\ c \geq 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

Se $M := \max_{\overline{\Omega}} u \geq 0$, *allora non esiste un* $x_0 \in \Omega$ *tale che* $u(x_0) = M$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un tale $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = M \geq 0$, allora $Du(x_0) = 0$ e $D^2u(x_0) \leq 0$. Ma dunque

$$\begin{aligned} 0 &> Lu(x_0) \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) D_{ij} u(x_0) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x_0) D_i u(x_0) + c(x_0) u(x_0) \\ &\geq -\operatorname{tr}\left(A(x_0) D^2 u(x_0)\right), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x_0) D_i u(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad c(x_0) u(x_0) \geq 0.$$

Ora ricordiamo che $A(x_0) \geq 0$ e $D^2u(x_o) \leq 0$ e dunque $\operatorname{tr}\left(A(x_0)D^2u(x_0)\right) \leq 0$ e quindi otteniamo l'assurdo $0 > Lu(x_0) \geq 0$. □

Osservazione 4.4.1. Osserviamo che in questo lemma non abbiamo sfruttato l'uniforme ellitticità dell'operatore L. Inoltre:

(a) nel caso in cui $c \equiv 0$ non serve la condizione che $M \geq 0$;

(b) le ipotesi $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e $u \in C^0(\overline{\Omega})$ servono per avere l'esistenza di M finito;

(c) abbiamo il risultato analogo per un minimo $m \leq 0$ se $Lu > 0$.

Teorema 4.4.1 (Principi di massimo debole)**.** *Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tale che*

$$\begin{cases} Lu \leq 0 & in\ \Omega \\ c \geq 0 & in\ \Omega \end{cases}$$

Se $M := \max_{\overline{\Omega}} u \geq 0$, allora

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Osservazione 4.4.2. (a) Abbiamo una versione analoga se $Lu \geq 0$ per un minimo *mleq*0;

(b) Non serve l'ipotesi $M \geq 0$ ($m \leq 0$) se $c \equiv 0$;

(c) Una funzione u tale che $Lu \leq 0$ è detta *subsoluzione dell'equazione* $Lu = 0$. Quindi, il principio di massimo debole ci dice che subsoluzioni realizzano i loro massimi non-negativi al bordo.

Dimostrazione. La dimostrazione sfrutta un'argomentazione perturbativa in combinazione con il Lemma 4.4.1

1. Poniamo $u_\varepsilon = u + \varepsilon e^{\mu x_1}$ con $\varepsilon > 0$ piccolo e $\mu > 0$ grande da stabilire. Allora

$$\begin{aligned} Lu_\varepsilon &= Lu + \varepsilon\left(-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D_{ij}\left(e^{\mu x_1}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i\left(e^{\mu x_1}\right) + ce^{\mu x_1}\right) \\ &= Lu + \varepsilon e^{\mu x_1}\left(-a_{11}\mu^2 + b_1\mu + c\right) \end{aligned}$$

   Usando $b_1 \leq M_1, c \leq M_2$ e

$$a_{11} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \vartheta|e_1| = \vartheta \quad \text{per } \xi = e_1,$$

   otteniamo

$$Lu_\varepsilon \leq Lu + \varepsilon e^{\mu x_1}(-\vartheta\mu^2 + \mu M_1 + M_2) < 0$$

   se $\mu > 0$ è abbastanza grande.

2. Usando $M \geq 0$ abbiamo $M_\varepsilon := \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon > 0$. Dunque, per il Lemma 4.4.1 abbiamo

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \Omega: \quad u(x) < u(x) + \varepsilon e^{\mu x_1} &< \max_{\partial\Omega} (u(x) + \varepsilon e^{\mu x_1}) \\ &\leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} e^{\mu x_1}. \end{aligned}$$

Facendo tendere $\varepsilon \to 0^+$, otteniamo

$$\sup_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

3. La stessa argomentazione funziona nel caso $c \equiv 0$ senza l'ipotesi $M \geq 0$.

□

Osservazione 4.4.3. Nel caso $c \geq 0$, possiamo anche dire che

$$\begin{cases} \max\limits_{\overline{\Omega}} u \leq \max\limits_{\partial\Omega} u^+ & \text{se } Lu \leq 0 \text{ in } \Omega \\ \\ \min\limits_{\overline{\Omega}} u \geq -\max\limits_{\partial\Omega} u^- & \text{se } Lu \geq 0 \text{ in } \Omega \end{cases}$$

senza l'ipotesi $M \geq 0$ o $m \leq 0$.

Osservazione 4.4.4. L'ipotesi $c \geq 0$ è necessaria per il Teorema 4.4.1. Infatti, se prendiamo $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$ e $u(x_1, x_2) = \sin(x_1)\, \sin(x_2)$ e consideriamo

$$\begin{cases} -\triangle u = 2u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

allora, poichè $u > 0$ in Ω, il massimo deve stare necessariamente all'interno. Notiamo che questo esempio indica anche un legame tra la validità di un principio di massimo per $L - \lambda I$ e la possibilità che $\lambda > 0$ sia un autovalore per L.

Osservazione 4.4.5. Un principio di massimo/minimo *debole* dice che i massimi/minimi si trovano al bordo del dominio. Invece, un principio di massimo/minimo *forte* dice che si trovano all'interno solo quando la soluzione è banale, cioè costante. Il punto chiave per mostrare questo fatto è un'analisi del comportamento delle derivate direzionali al bordo nei punti di massimo/minimo. Lo strumento principale è il seguente Lemma.

Lemma 4.4.2 (di Hopf)**.** *Sia $B = B_R(y)$ una palla aperta, $x_0 \in \partial B$. Sia $u \in C^2(B) \cap C^0(B \cup \{x_0\})$ e tale che soddisfi*

$$\begin{cases} Lu \leq 0 & \text{in } B \\ c \geq 0 & \text{in } B \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} u(x_0) \geq 0 \\ u(x_0) > u(x) & \text{in } B. \end{cases}$$

Allora:

(a) Per ogni direzione V esterna a B; cioè V tale che $V \cdot \nu > 0$ si ha che

$$\liminf_{t \to 0^+} \left(\frac{u(x_0) - u(x_0 - tV)}{t} \right) > 0$$

(b) Se $u \in C^1(B \cup \{x_0\})$ allora

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$$

(c) Inoltre se $c \equiv 0$ non serve l'ipotesi $u(x_0) \geq 0$.

Dimostrazione. Prima di tutto osserviamo che ovviamente $(a) \implies (b)$. Dunque mostriamo che vale (a).

1. WLOG prendiamo $u \in C^0(\overline{B})$ e dunque abbiamo $u(x) < u(x_0)$ per ogni $x \in \overline{B} \setminus \{x_0\}$, altrimenti scegliamo $B_{\hat{R}}(\hat{y}) \subset B_R(y)$ e lavoriamo con $B = B_{\hat{R}}(\hat{y})$

2. Basta costruire una funzione ausiliaria $h \in C^2(\overline{B})$ e trovare un ε tale che la perturbazione $w = u + \varepsilon h$ di u soddisfi

$$\begin{cases} \max\limits_{\overline{\Omega_0}} w = w(x_0) \\ w(x) < w(x_0) \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}_0 \setminus \{x_0\} \\ \\ \dfrac{\partial h}{\partial \nu}(x_0) < 0 \end{cases}$$

   dove $\Omega_0 := B \cap B_r(x_0)$ con $0 < r < R/2$. Infatti, con questa perturbazione, notiamo che w e u hanno un massimo locale in x_0

$$\frac{w(x_0) - w(x_0 - tv)}{t} > 0 \quad \text{per ogni } t \in (0, r)$$

$$\implies \frac{u(x_0) - u(x_0 - tv)}{t} > -\varepsilon \frac{h(x_0) - h(x_0 - tv)}{t}$$

   e dunque

$$\liminf_{t \to o^+} \frac{u(x_0) - u(x_0 - tv)}{t} \geq -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial \nu} > 0$$

   N.B. Nel caso $u \in C^1(\overline{B})$ si ha $\dfrac{\partial w}{\partial V}(x_0), \dfrac{\partial u}{\partial V}(x_0) \geq 0$ e quindi

$$\frac{\partial u}{\partial V}(x_0) = \frac{\partial w}{\partial V}(x_0) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial V}(x_0) > 0,$$

   ovvero la conclusione (b). [7]

[7] Nel Anno Accademico 2010-2011, solo questo caso è stato discusso a lezione.

3. Costruiamo effettivamente una tale h. Scegliamo

$$h(x) = e^{-\mu|x-y|^2} - e^{-\mu R^2} \quad \text{con } \mu > 0 \text{ da stabilire.}$$

Si ha:

i) $h \geq 0$ in $\overline{B}$ (usando $|x-y| \leq R$ su $\overline{B}$).

ii) $h \equiv 0$ su ∂B (usando $|x-y| = R$ su ∂B).

iii) $\frac{\partial h}{\partial \nu} < 0$ (facendo un conto). Infatti

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial \nu} &= Dh \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \\ &= \sum_{i=1}^{n} -2\mu e^{-\mu|x-y|^2} \frac{(x_i-y_i)^2}{|x-y|} \\ &= -2\mu e^{-\mu|x-y|^2}|x-y| \\ &= -2\mu e^{-\mu|x-y|^2} R < 0\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza vale perchè su ∂B abbiamo $|x-y| = R$.

iv) $Lh < 0$ in Ω_0 per $\mu > 0$ abbastanza grande (facendo un conto). Infatti

$$\begin{aligned}Lh = e^{-\mu|x-y|^2} &\left[-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} 4\mu^2 (x_i-y_i)(x_j-y_j) \right. \\ &\left. + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} 2\mu\delta_{ij} - \sum_{i=1}^{n} b_i 2\mu(x_i-y_i) + c \right] - ce^{-\mu R^2} \\ &\leq e^{-\mu|x-y|^2} \left[-4\mu^2 \vartheta |x-y|^2 + 2\mu M_1 + M_2 \right] \\ &< 0 \quad \text{per } \mu \text{ abbastanza grande}\end{aligned}$$

4. Ora dobbiamo trovare ε in modo che $w(x) = u(x) + \varepsilon h(x)$ soddisfi

$$w(x) < w(x_0) \quad \forall\, x \in \Omega_0 \setminus \{x_0\}.$$

Osserviamo che

$$Lw = Lu + \varepsilon Lh < 0$$

Dunque per il Lemma 4.4.1 w non ha punti di massimo interni. Ora ci domandiamo: esiste un punto di massimo diverso da x_0? Abbiamo due possibilità:

(1) Esiste un $x_M \in \partial B \setminus \{x_0\} \cap \partial\Omega_0$ punto di massimo. Ma in questo caso

$$w(x_M) = u(x_M) + \varepsilon h(x_M) = u(x_M) < u(x_0)$$

Assurdo.

(2) Esiste un $x_M \in \overline{\partial\Omega_0 \cap B}$ punto di massimo. Assurdo perchè $u(x) < u(x_0)$ per ogni $x \in \overline{\partial\Omega_0 \cap B}$.

Dunque esiste δ tale che $u(x) < u(x_0) - \delta$ e dunque
$w(x) = u(x) + \varepsilon h(x) < u(x_0) - \delta + \varepsilon \max_{\overline{\Omega}} h(x) < w(x_0) = u(x_0)$ a patto di prendere

$$-\delta + \varepsilon \max_{\overline{\Omega}} h(x) < 0 \iff \varepsilon < \frac{\delta}{\max_{\overline{\Omega}} h(x)}.$$

□

Teorema 4.4.2 (Principio di massimo forte)**.** *Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, con Ω connesso, tale che*

$$\begin{cases} Lu \leq 0 & \text{in } \Omega \\ c \geq 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Se esiste un $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = M = \max_{\overline{\Omega}} u(x) \geq 0$ allora $u \equiv M$ su tutto $\overline{\Omega}$. Inoltre se $c \equiv 0$ non serve l'ipotesi che $M \geq 0$.

Dimostrazione. Definiamo

$$\Sigma = \{x \in \Omega \ : \ u(x) = M\}$$

1. Sicuramente $\Sigma \neq \emptyset$ perchè almeno $x_0 \in \Sigma$ per ipotesi.

2. $\Sigma = u^{-1}(\{M\})$ è relativamente chiuso in Ω perchè u è continua.

3. $\Omega \setminus \Sigma$ è aperto in Ω e non è tutto Ω. Vogliamo mostrare che $\Omega \setminus \Sigma = \emptyset$. Se per assurdo esistesse un $y \in \Omega \setminus \Sigma$, prendiamo una bolla $B = B_R(y) \subset \Omega \setminus \Sigma$ tale che $\partial B \cap \Sigma$ tocchi il bordo di Σ in un punto $\hat{x}_0$. Ad esempio, scegliamo il punto $y \in \Omega \setminus \Sigma$ tale che $d(y, \Sigma) < d(y, \partial\Omega)$ e facciamo crescere il raggio finchè $\partial B_R(y) \cap \Sigma$ tocca $\partial\Sigma$. Usiamo il Lemma di Hopf con $\hat{x}_0 \in \Sigma \cap \partial B$ dove

$$\begin{cases} Lu \leq 0, \ c \geq 0 & \text{in } B \\ u(\hat{x}_0) > u(x) & \text{in } B \\ u(\hat{x}_0) = M \geq 0 \end{cases}$$

Essendo $u \in C^1(B \cup \{\hat{x}_0\})$ abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\hat{x}_0) > 0,$$

ma $\hat{x}_0$ è punto di massimo relativo e quindi $Du(\hat{x}_0) = 0$, assurdo.

□

Osservazione 4.4.6. [8] Serve qualche forma di elliticità uniforme per il Lemma di Hopf. Ad esempio

$$\begin{cases} u(x,y) = -x^4 \quad \text{in } \Omega = (0,1)\times(-1,1) \\ L = -xD_x^2 - D_y^2 + 4D_x. \end{cases}$$

Si ha $Lu = -4x^3 \leq 0$. In $B = B_{1/2}(1/2, 0) \subset \Omega$ abbiamo un massimo stretto in $(0,0) \in \partial\Omega$, ma la derivata normale uscente $\partial_\nu u(0,0) = -D_x u(0,0) = 0$ non è strettamente positiva.

Osservazione 4.4.7. [9] Vale un Lemma di Hopf al bordo $\partial\Omega$ di un dominio Ω se

(i) L è uniformemente ellittico in Ω;

(ii) $\partial\Omega$ soddisfa la *condizione della sfera interna*, ovvero per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ esiste una bolla B tale che $B \subset \Omega$ e $\partial\Omega \cap \partial B = \{x_0\}$. La condizione è soddisfatta, ad esempio, se $\partial\Omega \in C^2$.

Osservazione 4.4.8. Ci sono un certo numero di applicazioni importanti del principio di massimo debole e forte (v. Evans [5] per dettagli). Ad esempio:

(a) Unicità di soluzioni classiche per il problema di Dirichlet (usando il PdM debole);

(b) Quasi unicità di soluzioni per il problema di Neumann; cioè la differenza di due soluzioni è una costante (usando il PdM forte);

(c) Stime a priori puntuali.

4.4.2 Principio di massimo per soluzioni deboli

Obiettivo: Estendere i risultati trovati per funzioni regolari a funzioni in $H^1(\Omega)$. Il risultato voluto ha la forma

$$\begin{cases} Lu \leq 0 \quad \text{in } \Omega \\ u \in H^1(\Omega) \end{cases} \Rightarrow \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u^+$$

dove possiamo prendere u al posto di u^+ se $c \equiv 0$. Per fare questo abbiamo bisogno di qualche definizione.

Definizione 4.4.1. Siano $u, w \in H^1(\Omega)$ diciamo che

(a) $u \geq 0$ in $H^1(\Omega)$ se $u = u^+$ in $H^1(\Omega)$. In particolare ogni rappresentante della classe definita da u è non negativa quasi ovunque.

(b) $u \geq w$ in $H^1(\Omega)$ se $u - w \geq 0$ in $H^1(\Omega)$.

[8] Non fatto nel Anno Accademico 2010-2011
[9] Non fatto nel Anno Accademico 2010-2011

(c) $Lu \geq 0$ ($Lu \leq 0$) debolmente in Ω se $B[u,v] \geq 0$ ($B[u,v] \leq 0$) per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$ tale che $v \geq 0$ (o in modo equivalente, per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ tale che $v \geq 0$ in $H^1(\Omega)$).

(d) $u \leq 0$ (debolmente) su $\partial\Omega$ se $u^+ \in H_0^1(\Omega)$.

(e) $u \leq w$ (debolmente) su $\partial\Omega$ se $(u-w)^+ \in H_0^1(\Omega)$.

(f) $\operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u = \inf\{k \in \mathbb{R} : \ u \leq k \quad \text{(debolmente) su } \partial\Omega\}$.

(g) $\operatorname*{ess\,inf}_{\partial\Omega} u = -\operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega}(-u)$.

Osservazione 4.4.9 (Ipotesi su Ω e L)**.** In tutto questo paragrafo assumiamo:

(i) $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ aperto e connesso;

(ii) $Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}D_iu) + \sum_{i=1}^{n} b_iD_iu + cu$;

(iii) $a_{ij} = a_{ji}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$;

(iv) esiste $\vartheta > 0$ tale che $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \vartheta|\xi|^2$ per ogni $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$;

(v) $c \geq 0$ q.o. in Ω;

(vi) $\vartheta - \dfrac{M_1^2C_P^2}{\vartheta} > 0$ dove $M_1 := \max_{1\leq i\leq n} \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}$ e C_P è la costante di Poincarè.

Notiamo che l'ipotesi (vi) è fatta per avere la coercività della forma bilineare B.

Teorema 4.4.3. *Sia $u \in H^1(\Omega)$ tale che*

$$\begin{cases} Lu \leq 0 & \text{in } \Omega \\ u \leq 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

allora $u \leq 0$ in $H^1(\Omega)$ e quindi q.o. in Ω.

Osservazione 4.4.10. Il teorema è un *principio di confronto* con la funzione $w = 0$; cioè

$$\begin{cases} Lu \leq Lw = 0 & \text{in } \Omega \\ u \leq w = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow \quad u \leq w = 0 \quad \text{in } H^1(\Omega).$$

Dimostrazione. 1. $Lu \leq 0$ significa che $B[u,v] \leq 0$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ tale che $v \geq 0$. Prendiamo $v = u^+$ per ottenere

$$0 \geq B[u,u^+] = \int_\Omega \left[(A(x)Du)\cdot Du^+ + (b(x)\cdot Du)u^+ + c(x)uu^+\right] dx,$$

ma sappiamo che

$$Du^+ = \begin{cases} Du & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u \le 0 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} 0 \ge B[u, u^+] &= \int_\Omega \left[(A(x)Du^+) \cdot Du^+ + (b(x) \cdot Du^+)u^+ + c(x)(u^+)^2 \right] dx \\ &= B[u^+, u^+] \end{aligned}$$

dove $u^+ \in H_0^1(\Omega)$.

2. Per l'ipotesi (*vi*), B risulta coerciva. Infatti

$$\begin{aligned} \vartheta \int_\Omega |Dv|^2 \, dx &\le B[v, v] - \int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i D_i v v \, dx - \int_\Omega c v^2 \, dx \\ &\le B[v, v] + M_1 \int_\Omega |Dv| \, |v| \, dx \quad (c \ge 0) \\ &\le B[v, v] + M_1 \left[\varepsilon \int_\Omega |Dv|^2 \, dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega v^2 \, dx \right] \end{aligned}$$

Se prendiamo

$$\varepsilon = \frac{\vartheta}{2M_1}$$

allora otteniamo

$$\frac{\vartheta}{2} \int_\Omega |Dv|^2 \, dx \le \frac{M_1^2}{2\vartheta} \int_\Omega v^2 \, dx + B[v, v] \le \frac{M_1^2 C_p^2}{2\vartheta} \int_\Omega |Dv|^2 \, dx + B[v, v],$$

e quindi

$$\left[\frac{\vartheta}{2} - \frac{M_1^2 C_p^2}{2\vartheta} \right] \int_\Omega |Dv|^2 \, dx \le B[v, v],$$

ovvero la coercività di B. Quindi, usando $v = u^+ \in H_0^1(\Omega)$, otteniamo

$$0 \ge B[u^+, u^+] \ge C \int_\Omega |Du^+|^2 \, dx$$

e quindi $u^+ = 0$ in $H_0^1(\Omega)$ cioè $u = u^-$ in $H^1(\Omega)$, cioè $u \le 0$ quasi ovunque in Ω.

□

Corollario 4.4.1 (Principio del confronto)**.** *Siano $u, w \in H^1(\Omega)$ tali che*

$$\begin{cases} Lu \le Lw & \text{in } \Omega \\ u \le w & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow \quad u \le w \quad \text{su } H^1(\Omega).$$

Dimostrazione. Ponendo $v = u - w$ e usando la linearità di L abbiamo $Lv \leq 0$ in Ω e $v \leq 0$ su $\partial\Omega$. Applicando il Teorema 4.4.3 otteniamo $v \leq 0$ in $H^1(\Omega)$, ovvero $u \leq w$ in $H^1(\Omega)$. □

Corollario 4.4.2 (Principio di massimo debole per soluzioni deboli)**.** *Sia $u \in H^1(\Omega)$ tale che $Lu \leq 0$ in Ω. Allora*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u^+.$$

Se inoltre $c \equiv 0$ allora

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u.$$

Dimostrazione. WLOG possiamo assumere che

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u^+ < +\infty.$$

- Per ogni $k \in \mathbb{R}^+$ tale che $\operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u^+ < k$ abbiamo

$$u \leq k \quad \text{su } \partial\Omega.$$

- Per ogni $v \in C_0^1(\Omega)$ con $v \geq 0$ abbiamo

$$\begin{aligned} B[u-k, v] &= \int_\Omega [A(x)Du(x) \cdot Dv(x) + (b(x) \cdot Du(x))v(x) + c(x)(u(x) - k)v(x)]\, dx \\ &= B[u, v] - k \int_\Omega cv\, dx \\ &\leq B[u, v] \leq 0, \end{aligned}$$

  ovvero $L(u - k) \leq 0$ debolmente in Ω. Dunque, per il Teorema 4.4.3, abbiamo $u - k \leq 0$ q.o. in Ω e dunque $u \leq k$ q.o. in Ω. Quindi

$$u \leq k \quad \text{q.o. in } \Omega \text{ per ogni } k \text{ tale che } k > \operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u^+.$$

- Facendo tendere $k \searrow \operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u^+$, otteniamo la tesi.

- Nel caso $c \equiv 0$, non serve $k > 0$ e possiamo prendere $k > \operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u$.

□

Osservazione 4.4.11. Ricordiamo che nel caso di regolarità classica, $Lu \leq 0$ implica che u ha i suoi massimi M non negativi su $\partial\Omega$ se $c \geq 0$ e che non serve la non negatività di M nel caso $c \equiv 0$.

Osservazione 4.4.12 (Principio di minimo debole per soluzioni deboli)**.** Applicando il Corollario 4.4.2 a $-u$ si ottiene: *Sia $u \in H^1(\Omega)$ tale che $Lu \geq 0$ in Ω. Allora*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} u \geq \operatorname*{ess\,inf}_{\partial\Omega} u^-.$$

Se inoltre $c \equiv 0$ allora

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} u \geq \operatorname*{ess\,inf}_{\partial\Omega} u.$$

Corollario 4.4.3 (Unicità delle soluzioni deboli)**.** *Per ogni $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$, esiste al più una soluzione debole $u \in H^1(\Omega)$ del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Dimostrazione. Date due soluzioni u_1, u_2 consideriamo $u = u_1 - u_2$. Per linearità, u è soluzione debole del problema

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Usando il principio di massimo/minimo debole per soluzioni deboli, otteniamo

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u^+ = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} u \geq \operatorname*{ess\,inf}_{\partial\Omega} u^- = 0.$$

□

Osservazione 4.4.13. Questo ultimo risultato di principio di massimo debole si può estendere ad una generica matrice $A(x) \geq 0$ che abbia una qualche direzione uniformemente ellittica (v. Monticelli-Payne [10]). Questa condizione di ellitticità è stata introdotta nella tesi di dottorato di Monticelli (v. Monticelli [9]) ed è sufficiente per ottenere anche il Lemma di Hopf per classe di operatori ellittici degeneri.

4.5 Autovalori e autofunzioni

Consideriamo il problema di Dirichlet associato all'equazione agli autovalori

$$\begin{cases} Lw = \lambda w & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se esiste $w \in H_0^1(\Omega)$ con $w \neq 0$ soluzione debole del problema, λ è detto *autovalore di L (rispetto alla condizione di Dirichlet omogenea al bordo)* e w è detta *autofunzione associata a λ*. Se $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ è aperto e L un operatore uniformente ellittico in forma di divergenza con

coefficienti $L^\infty(\Omega)$, sappiamo dal Teorema 4.2.3 (con $f = 0 \in L^2(\Omega)$) che esiste lo spettro reale

$$\Sigma = \{\lambda \in \mathbb{R} : \ \exists\, w \in H_0^1(\Omega) \quad \text{soluzione debole con } w \not\equiv 0\},$$

dove Σ è al più numerabile con $+\infty$ l'unico punto di accumulazione possibile. Vogliamo dirne di più mettendo delle ipotesi più forti. In particolare assumiamo:

- $Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}D_i u)$ $(b_i, c = 0)$;
- $a_{ij} = a_{ji} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (più regolarità dei coefficienti);
- Esiste $\vartheta > 0$ tale che $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \vartheta|\xi|^2$ per ogni $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Osservazione 4.5.1. Grazie a queste ipotesi possiamo dire che

- Se esiste un'autofunzione w allora $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$.
- L è coercivo.
- L è formalmente autoaggiunto.

Cominciamo con il seguente Lemma.

Lemma 4.5.1. *Nelle ipotesi enunciate sopra*

(a) Esiste un operatore lineare $K : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ che associa ad $f \in L^2(\Omega)$ l'unica soluzione debole $u = Kf$ del problema di Dirichlet per L; cioè $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$B[u, v] = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \textit{per ogni } v \in H_0^1(\Omega);$$

(b) $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ è compatto;

(c) K è autoaggiunto, ovvero

$$(Kf, g)_{L^2(\Omega)} = (f, Kg)_{L^2(\Omega)} \quad \textit{per ogni } f, g \in L^2(\Omega);$$

(d) K è positivo, ovvero

$$(Kf, f)_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \textit{per ogni } f \in L^2(\Omega).$$

Dimostrazione. (a) Si ha

$$B[u, u] = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D_i u D_j u\right] dx \geq \vartheta \int_\Omega |Du|^2\, dx = \vartheta \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Quindi B è coerciva (e continua) e abbiamo la tesi per il Lemma di Lax-Milgram.

(b) La mappa $K : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ è continua e l'immersione $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ è compatta.

(c) Poniamo $u := Kf$ e $v = Kg$ e abbiamo

$$(Kf, g)_{L^2(\Omega)} = (u, g)_{L^2(\Omega)} = (g, u)_{L^2(\Omega)} = B[v, u]$$

$$(f, Kg)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} = B[u, v]$$

ma $B[u, v] = B[v, u]$

(d) Abbiamo

$$(Kf, f)_{L^2(\Omega)} = (u, f)_{L^2(\Omega)} = (f, u)_{L^2(\Omega)} = B[u, u] \geq \vartheta \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

□

Osservazione 4.5.2. Possiamo rafforzare la parte (d) osservando che

$$\inf_{\{f \in L^2(\Omega):\ \|f\|=1\}} (Kf, f) \geq 0 \quad \text{e} \quad \sup_{\{f \in L^2(\Omega):\ \|f\|=1\}} (Kf, f) = \sup_{\{f \in L^2(\Omega):\ \|f\|=1\}} |(Kf, f)| := \|K\| < +\infty,$$

dove ricordiamo che K è positivo (parte (d) del Lemma 4.5.1).

Teorema 4.5.1 (Autovalori di operatori ellittici simmetrici)**.** *Si ha:*

(a) Ogni autovalore λ di L è reale.

(b) Ogni autovalore λ_k ha molteplicità finita e lo spettro $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ è una successione tale che

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...\lambda_k \to +\infty$$

(c) Esiste una base ortonormale in $L^2(\Omega)$ di autofunzioni $\{w_k\}_1^{+\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ di $K = \frac{1}{\gamma} L_\gamma^{-1}$ con autovalori μ_k. Inoltre, le funzioni $\{w_k\}_1^{+\infty}$ sono autofunzioni deboli di L con autovalori $\lambda_k = 1/\mu_k$.

Notiamo che $w \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ e che $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$ se inoltre $\partial\Omega \in C^\infty$.

Dimostrazione. 1. $\lambda \neq 0$ perchè esiste $K = L^{-1}$; cioè l'unica soluzione debole in $H_0^1(\Omega)$ di $Lu = 0$ è 0. Quindi possiamo scrivere il problema per w

$$\begin{cases} Lw = \lambda w & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

nella forma

$$Kw = \mu w \quad \text{con } \mu := 1/\lambda.$$

2. $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ è autoaggiunto, positivo e compatto su $L^2(\Omega)$ uno spazio di Hilbert separabile. Quindi, usando un risultato di analisi funzionale (v. Teorema 7 di Appendice D di Evans [5]) possiamo affermare:

   - esiste una successione $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ di autovalori positivi con molteplicità finita tale che $\mu \in (0, \Lambda)$ dove Λ è la costante dell'Osservazione 4.5.2;
   - $\mu_k \to 0$ per $k \to +\infty$;
   - esiste una base ortonormale $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ di $L^2(\Omega)$ di autofunzioni associate alla successione $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$.

   e abbiamo la tesi ponendo $\lambda_k = 1/\mu_k$ e notando che $w \in H_0^1(\Omega)$ per costruzione.

□

Teorema 4.5.2 (Esistenza di un autovalore principale)**.** *Esiste un autovalore λ_1 detto autovalore principale che soddisfa le seguenti proprietà:*

(a) (Principio variazionale)

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \min\left\{B[u,u] \ : \ u \in H_0^1(\Omega) \ , \ \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1\right\} \\ &= \min_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)} \left\{\frac{B[u,u]}{\|u\|_{L^2(\Omega)}}\right\}\end{aligned}$$

(b) (Prima autofunzione con segno) Esiste $w_1 \in H_0^1(\Omega)$ tale che $w_1 > 0$ in Ω (e quindi $-w_1$ è anche autofunzione strettamente negativa in Ω).

(c) (λ_1 è semplice) Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione debole di

$$\begin{cases} Lu = \lambda_1 u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

allora esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $u = Cw$, cioè l'autospazio corrispondente a λ_1 ha dimensione 1.

Dimostrazione. Presentiamo solo lo schema della dimostrazione[10]

(a) La dimostrazione consiste di tre passi.

1. Per il Teorema 4.5.1 esiste $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ una base ortonormale in $L^2(\Omega)$ di autofunzioni di L con $w_k \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$. Quindi

$$\begin{cases} B[w_k, w_k] = \lambda_k \|w_k\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda_k \\ B[w_k, w_j] = \lambda_k (w_k, w_j)^2_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{se } k \neq j \end{cases}$$

   In particolare, $\lambda_1 = B[u,u]$ per ogni autofunzione con $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$ corrispondente a λ_1.

[10] Facoltativo per l'Anno Accademico 2010-2011.

2. Si mostra che $\left\{\lambda_k^{-1/2} w_k\right\}_{k=1}^{+\infty}$ è una base ortonormale per lo spazio $H_0^1(\Omega)$ munito di un prodotto scalare calibrato a B, ovvero

$$((u, v)) := B[u, v].$$

3. Preso $u = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k w_k$ con $\sum_{k=1}^{+\infty} d_k^2 = 1$ per avere $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$, si ha

$$B[u, u] = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k^2 \lambda_k \geq \lambda_1,$$

quindi λ_1 è una minorante per il rapporto $B[u, u]/\|u\|_{L^2(\Omega)}$ che è raggiunto in $u = w_1$.

(b) Anche qui, ci sono tre passi.

1. Per $u \in H_0^1(\Omega)$ con $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$ abbiamo l'equivalenza

$$\begin{cases} Lu = \lambda_1 u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \Leftrightarrow B[u, u] = \lambda_1 \quad (*)$$

2. Le funzioni u^+, u^- sono autofunzioni perchè

$$\frac{u^+}{\|u^+\|_{L^2(\Omega)}} \quad \text{e} \quad \frac{u^-}{\|u^-\|_{L^2(\Omega)}}$$

soddisfano $(*)$.

3. Abbiamo $u^\pm \in C^\infty(\Omega)$ perchè $a_{ij} \in C^\infty(\Omega)$ e per il principio di massimo forte

$$\begin{cases} Lu^+ = \lambda_1 u^+ \geq 0 \\ Lu^- = \lambda_1 u^- \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad u^\pm > 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{se } u^\pm \not\equiv 0.$$

Quindi $u > 0$ oppure $u < 0$ in Ω.

(c) Se $u, \tilde{u}$ sono due autofunzioni associate a λ_1, allora hanno segno stretto su tutto Ω e quindi

$$\int_\Omega u \, dx \neq 0 \neq \int_\Omega \tilde{u} \, dx. \quad (**)$$

Quindi esiste C tale che

$$\int_\Omega (\tilde{u} - Cu) \, dx = 0.$$

Adesso $\tilde{u} - Cu$ soddisfa $(*)$ e quindi dovrebbe avere segno stretto se non è identicamente nullo. Ma non può avere segno stretto per $(**)$, quindi $\tilde{u} = Cu$ in Ω.

□

Osservazione 4.5.3 (Commento finale)**.** Esiste una relazione tra $\lambda_1(L, \Omega)$ ed il principio di massimo anche per L non in forma di divergenza e non autoaggiunto. In particolare,

- Si mostra che le autofunzioni appartengono a $W^{2,n}_{\text{loc}}(\Omega)$;
- Esiste un autovalore principale $\lambda_1 > 0$, ovvero un autovalore semplice con autofunzione con segno. Inoltre, λ_1 soddisfa la proprietà che $\text{Re}(\lambda) \geq \lambda_1$ per ogni autovalore λ di L.

In particolare, si ha il seguente teorema fondamentale.

Teorema 4.5.3 (Berestycki-Nirenberg-Varadhan [2])**.** *Si ha il principio di confronto*

$$\begin{cases} Lw \leq 0 \quad \textit{in } \Omega \\ w \textit{ limitata superiormente} \quad \Rightarrow \quad w \leq 0 \quad \textit{in } \Omega \\ w \leq 0 \quad \textit{su } \partial\Omega \end{cases}$$

se e solo se $\lambda_1(L, \Omega) > 0$*. Inoltre si può definire* λ_1 *come*

$$\lambda_1 := \sup\{\lambda : \textit{ esiste } \varphi > 0 \textit{ in } \Omega \textit{ tale che } (L - \lambda)\varphi \geq 0 \textit{ in } \Omega \}.$$

Bibliografia

[1] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces, Second Edition*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] H. Berestycki, L. Nirenberg, and S.R.S. Varadhan. The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47(1):47–92, 1994.

[3] H. Brezis. *Analisi Funzionale: Teoria e Applicazioni*. Liguori Editore, Napoli, 1986.

[4] R. Dautray and J-L. Lions. *Mathematical Aanalysis and Numerical Methods for Science and Technology, Volume 1: Physical Origins and Classical Methods*. Springer Verlag, Berlin, 2000.

[5] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[6] G. Gilbarg and N.S Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics. Springer Verlag, Berlin, 2001.

[7] E. Giusti. *Metodi Diretti nel Calcolo delle Variazioni*. Unione Matematica Italiana, Bologna, 1994.

[8] F. John. *Partial Differential Equations, Fourth Edition*, volume 1 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer Verlag, New York, 1982.

[9] D. Monticelli. Maximum principles and the method of moving planes for a class of degenerate elliptic linear operators. *J. Eur. Math. Soc.*, 12(3):611–654, 2010.

[10] D. Monticelli and K.R. Payne. Maximum principles for weak solutions of degenerate elliptic equations with a uniformly elliptic direction. *J. Differential Equations*, 247:1993–2026, 2009.

[11] K.R. Payne. *Analisi Reale, Parte 1*. appunti del corso disponibile in rete all'indirizzo http://www.mat.unimi.it/users/payne/AnRealeLezParte1.pdf, 2007.