ANALISI MATEMATICA 2-I (C.d.L in Matematica)

Prof. Kevin R. Payne

Prova scritta del 19 giugno 2002

Esercizio 1.

i. Verificare che l'equazione

$$\Phi(x,y) = xy^2 + y + \sin(xy) + 3(e^x - 1) = 0$$

definisce localmente un'unica funzione implicita $y = g(x)$ vicino il punto $(0,0)$.

ii. Calcolare, giustificando la risposta, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) + 5x^2}{x^2}.$$

Esercizio 2.

i. Risolvere il seguente problema di Cauchy per la funzione $y = y(x)$

$$\begin{cases} y' = 4y + x^2 \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

ii. Fare uno studio qualitativo delle soluzioni del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{xy}{1 + (xy)^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (PC)$$

in dipendenza dal dato iniziale. **NON** è richiesta le soluzioni del problema (PC), ma si deve fare uno studio dell'esistenza ed unicità locale, intervalli massimali d'esistenza, eventuali simmetrie e soluzioni d'equilibrio, intervalli di cerescita e convessità. Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni.

N.B. Sono concesse **UN'ORA E TRENTA MINUTI** per la risoluzione degli esercizi .