PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA III - 31/01/02

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

a. Enunciare il Teorema di Dini delle funzioni implicite per funzioni $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$.

b. Siano $\Phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $\Phi(x,y,z) = xyz^2 - 4$ e Γ la superficie data da $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \Phi(x,y,z) = 0\}$. Stabilire per quali $(x,y,z) \in \Gamma$ la superficie è esplicitabile localmente come un grafico $z = g(x,y)$. Trovare l'equazione del piano tangente $T_p\Gamma$ nel punto $p = (1,1,2)$ e studiare la convessità della funzione implicita g nel punto $(1,1)$.

c. Stabilire per quali $(x,y,z) \in \Gamma$ il vincolo Γ è regolare e trovare i candidati per gli estremi locali di $f_{|\Gamma}$ dove $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Esercizio 2.

a. Dare le definizioni di *curva rettificabile* e *lunghezza di una curva* in $\mathbf{R}^n$. Verificare che la curva γ con parametrizzazione

$$\phi(t) = (t, 2t, -t^2) \quad t \in [1,2]$$

è rettificabile e calcolare la sua lunghezza $L(\gamma)$.

b. Sia $F : \Omega \subseteq \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ un campo vettoriale nello spazio. Dare le definizioni di F *conservativo/irrotazionale in* Ω e discutere **brevemente** i legami fra queste due proprietà.

c. Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ il campo vettoriale definito da $F(x,y,z) = (xy^2, yx^2, z^3/3)$. Trovare (se esiste) una funzione potenziale di F in $\mathbf{R}^3$ e calcolare il lavoro effettuato da F lungo la curva γ definita nella parte **a**.

Esercizio 3.

a. Dare le definizioni di *superficie regolare* e *forma differenziale esatta/chiusa in* $\mathbf{R}^3$.

b. Si consideri la superficie parametrizzata da

$$\Phi(u,v) = (-v, u, u^2 + v^2) \text{ per } (u,v) \in D = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

Verificare che Φ sia regolare e calcolare la sua area.

c. Stabilire se la forma differenziale $\omega = xe^z\,dx + z\,dy + xy\,dz$ è esatta/chiusa in $\mathbf{R}^3$ e calcolare l'integrale $\int_{\gamma^+} \omega$ dove γ^+ è il bordo della superficie definita nella parte **a.** con l'orientazione indotta dall'orientazione positiva su ∂D tramite la parametrizzazione Φ.

Esercizio 4. Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z \geq 0, \ \ x^2 + y^2 \leq (1+z)^{-4/3}\}$.

a. Mostrare che Ω ha volume finito e trovare il valore del volume.

b. Calcolare (se è finito) il valor medio della funzione $f(x,y,z) = (1+z)^{1/4}$ su Ω.

c. (FACOLTATIVO) Calcolare (se è finito) il flusso uscente dal bordo di Ω di ogni campo $F \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ tale che $\mathrm{div}F = f$ dove f è la funzione definita nella parte **b.**

Esercizio 5. (corso avanzato) Sia $u \in C^0(\overline{B_2(0)})$ una funzione armonica nel disco $B_2(0) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$ tale che $u_{|\partial B_2(0)} = g_{|\partial B_2(0)}$ dove $g(x,y) = x + y^2$.

a. Esiste un punto $(x_0, y_0) \in B_2(0)$ per cui $u(x_0, y_0) = 7$? Giustificare la risposta.

b. Trovare il valore di $u(0,0)$.

N.B. Sono concesse **TRE ORE** per la risoluzione degli esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.