SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA III - 31/01/02

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

a. Dare le definizioni di *superficie regolare* e *forma differenziale esatta/chiusa in* $\mathbf{R}^3$.

b. Si consideri la superficie parametrizzata da

$$\Phi(u,v) = (-v, u, u^2+v^2) \quad \text{per} \quad (u,v) \in D = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 : u^2+v^2 \leq 1\}.$$

Verificare che Φ sia regolare e calcolare la sua area.

c. Stabilire se la forma differenziale $\omega = xe^z\,dx + z\,dy + xy\,dz$ è esatta/chiusa in $\mathbf{R}^3$ e calcolare l'integrale $\int_{\gamma^+} \omega$ dove γ^+ è il bordo della superficie definita nella parte **a.** con l'orientazione indotta dall'orientazione positiva su ∂D tramite la parametrizzazione Φ.

Esercizio 2. Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z \geq 0, \quad x^2+y^2 \leq (1+z)^{-4/3}\}$.

a. Mostrare che Ω ha volume finito e trovare il valore del volume.

b. Calcolare (se è finito) il valor medio della funzione $f(x,y,z) = (1+z)^{1/4}$ su Ω.

c. (FACOLTATIVO) Calcolare (se è finito) il flusso uscente dal bordo di Ω di ogni campo $F \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ tale che $\mathrm{div} F = f$ dove f è la funzione definita nella parte **b.**

Esercizio 3. (corso avanzato) Sia $u \in C^0(\overline{B_2(0)})$ una funzione armonica nel disco $B_2(0) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 < 4\}$ tale che $u_{|\partial B_2(0)} = g_{|\partial B_2(0)}$ dove $g(x,y) = x+y^2$.

a. Esiste un punto $(x_0, y_0) \in B_2(0)$ per cui $u(x_0,y_0) = 7$? Giustificare la risposta.

b. Trovare il valore di $u(0,0)$.

N.B. È concessa **UN'ORA E TRENTA MINUTI** per la risoluzione degli esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.