**SECONDA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA III - 28/01/04**

**C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni**

*Prof. Kevin R. Payne*

**Esercizio 1.** Sia $\omega = \alpha(x,y,z)dx + xzdy + xydz$ una forma differenziale lineare con $\alpha \in C^1(\mathbf{R}^3)$

**a.** Determinare $\alpha$ tale che $\alpha(x,0,z) = 0$ per ogni $(x,z) \in \mathbf{R}^2$ e $\omega$ sia *esatta in* $\mathbf{R}^3$. Trovare tutte le primitive di $\omega$ con tale $\alpha$.

**b.** Sia $\Sigma$ il grafico della funzione $g(x,y) = xy + 1$ con dominio $D = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Scrivere la parametrizzazione canonica di $\Sigma$, calcolare la sua area e discutere **brevemente** la dipendenza dell'area della parametrizzazione.

**c.** Nel caso $\alpha \equiv 0$, calcolare $\int_{\gamma^+} \omega$ dove $\gamma^+ = \partial^+\Sigma$ con $\Sigma$ la superficie in parte b (con l'orientazione fornita dal campo normale $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ con $\nu_3 \geq 0$).

**Esercizio 2.**

**a.** Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un dominio *ammissibile per il Teorema della Divergenza* con versore normale esterno $\nu$ sul bordo di $\Omega$. Siano $g \in C^1(\overline{\Omega})$ e $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbf{R}^3)$. Mostrare la *formula di integrazione per parti*

$$\iiint_\Omega g \operatorname{div} F \, dx = \iint_{\partial\Omega} g \langle F, \nu \rangle \, d\sigma - \iiint_\Omega \langle \nabla g, F \rangle \, dx.$$

**b.** Sia $\Omega = \overline{B}_1(0) \cap \mathcal{C} \subset \mathbf{R}^3$ dove $\overline{B}_1(0) = \{||(x,y,z)|| \leq 1\}$ e $\mathcal{C} = \{z \geq ||(x,y)||\}$. Mostrare che $\Omega$ è ammissibile per il Teorema della Divergenza. Calcolare il flusso uscente dal bordo di $\Omega$ del campo

$$F(x,y,z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z).$$

Calcolare inoltre il flusso uscente dalla parte del bordo $\mathcal{C} \cap \partial\overline{B}_1(0)$.

**c.** Sia $\Omega = \Psi^{-1}([0,T])$ dove $\Psi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ è definita da $\Psi(x) = h(||x||^2)$ dove $h \in C^1([0,+\infty]$ con $h(0) = 0, h'(t) > 0, t \geq 0$. Sia $F(x) = g(||x||^2)x$ con $g \in C^1(\mathbf{R})$. Mostrare

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dx = 4\pi[h^{-1}(T)]^{3/2} g(h^{-1}(T)).$$

**N.B.** È concessa **UN'ORA E TRENTA MINUTI** per la risoluzione degli esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.