COMPITINO N.2 DI ANALISI MATEMATICA III - 28/01/05

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1. Sia $\alpha = g(x,y,z)\,dx + (2xy+z)\,dy + (y+2z)\,dz$ dove $g \in C^1(\mathbf{R}^3)$.

a. Trovare g t.c. α è <u>*esatta*</u> in $\mathbf{R}^3$ e $g(x,0,z) = 0$ per ogni $(x,z) \in \mathbf{R}^2$. Giustificare la risposta con le definizioni rilevanti ed gli enunciati dei risultati usati.

b. Sia g la funzione determinata nella parte **a**. Trovare tutte le primitive della forma α con questa g e calcolare $\int_\gamma \alpha$ dove γ è parametrizzata da $\varphi(t) = (t, t^2, 3-t), \quad t \in [0,2]$.

c. Sia invece $g = y^2 + 2y$. Calcolare l'integrale della forma α lungo γ una curva piana, regolare, semplice che racchiude un dominio regolare D nel piano $z = 0$ di area $|D|_2 = 10$ con l'orientazione positiva su γ.

Esercizio 2.

a. Siano F il campo vettoriale $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2 - 3z + 2)$ e Ω il dominio

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \quad x^2 + y^2 \leq z^2, \quad 1 \leq z \leq 2\}.$$

Verificare che F e Ω siano ammissibili per il Teorema della Divergenza nello spazio.

b. Verificare la tesi di tale teorema calcolando entrambi i membri della formula.

c. Siano $\Omega = \bar{B}_1(0)$ e $g \in C^1(\Omega)$ t.c. i suoi valor medi soddisfino $\bar{g}_{|\Omega} = A$ e $\bar{g}_{|\partial\Omega} = B$. Calcolare

$$\iiint_\Omega (xg_x + yg_y + zg_z)\,dxdydz.$$

Suggerimento: Potrebbe essere utile considerare $(xg)_x$, etc.

N.B. È concessa **UN'ORA e 45 MINUTI** per la risoluzione degli esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.