PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA III - 17/02/04

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

a. Enunciare il Teorema di Dini delle funzioni implicite per funzioni $\Phi : A \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

b. Sia $\Phi(x, y, z) = z^3 + 2xz + x^2 - y^2$. Trovare i punti $(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma = \Phi^{-1}(0)$ in cui Γ **NON** è un vincolo regolare. Trovare (se esiste) l'equazione del piano tangente a Γ nel punto $(0, 1, 1)$.

c. Trovare tutti i candidati per gli estremi locali di $f_{|\Gamma}$ dove $f(x, y, z) = z$ e Γ è definito nella parte **b**. Analizzare la natura di tutti quelli che stanno sulla parte regolare di Γ

Esercizio 2.

a. Dare la definizione di *curva rettificabile* e mostrare che una curva con parametrizzazione di classe C^1 è rettificabile.

b. Sia $\varphi(t) = (\sin t, \sin^{3/2} t), t \in [0, \pi/2]$. Trovare la lunghezza del suo sostegno e la parametrizzazione rispetto lunghezza d'arco.

c. Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove $\omega = e^x\, dx + xy\, dy$ e γ è la curva definita in parte **b** con l'orientazione indotta dalla parametrizzazione φ data.

Esercizio 3.

a. Sia Σ il sostegno della superficie parametrizzata da

$$\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v) \quad (u, v) \in D = [1, \sqrt{3}] \times [0, 2\pi].$$

Verificare che Φ è una superficie *regolare* e calcolare l'area di Σ.

b. Sia $F : A \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ un campo vettoriale. Dare le definizioni di *campo vettoriale conservativo* e *campo vettoriale irrotazionale* e discutere **brevemente** il legame fra questi due concetti.

c. Sia F il campo vettoriale definito in $\mathbf{R}^3$ da $F(x, y, z) = (xz, yz, y^2)$. Questo campo è conservativo in qualche aperto di $\mathbf{R}^3$? Calcolare il lavoro effettuato da F lungo la curva $\gamma^+ = \partial^+\Sigma$ dove Σ è la superficie definita nella parte **a** (con l'orientazione ν indotta dalla parametrizzazione Φ data).

Esercizio 4.

a. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ \ x^2 + y^2 \leq e^{-z}, \ y \geq 0, \ 0 \leq z \leq h\}$ con $h > 0$. Verificare che Ω è misurabile secondo Peano-Jordan e calcolare il suo volume.

b. Verificare che l'insieme Ω definito nella parte **a** è decomponibile in due domini normali e regolari rispetto l'asse z (e quindi ammissibile per il teorema della divergenza). Calcolare poi il flusso uscente dal bordo di Ω del campo $F(x, y, z) = (xe^{xy}, -ye^{xy}, z^2)$.

c. Siano $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ un insieme aperto e $u \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$ tali che per ogni palla $B_r(x_0) \subset \Omega$ il flusso del gradiente di u nullo; cioè

$$\iint_{\partial B_r(x_0)} \langle \nabla u, \nu \rangle \, d\sigma = 0$$

Mostrare che u soddisfa *l'equazione di Laplace* in Ω; cioè per ogni $x_0 \in \Omega$

$$\Delta u(x_0) = (\mathrm{div} \nabla u)(x_0) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x_0) = 0.$$

N.B. È concessa **TRE ORE E TRENTA MINUTI** per la risoluzione degli esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.