Soluzione della Prova Scritta di Analisi Matematica III - 17/07/02

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

1a. Per mostrare che $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 e^{x+y+z} + z$ é esplicitabile localmente come un grafico $z = g(x,y)$ basta applicare il teorema di Dini

Teorema: (di Dini) *Sia $\Phi : A \subseteq \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dove A è aperto. Supponiamo*

$$\textbf{i)}\quad \Phi, \Phi_y \in C^0(A)$$

$$\textbf{ii)}\quad \text{esiste } (x_0,y_0) \in A \text{ tale che } \Phi(x_0,y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \Phi_y(x_0,y_0) \neq 0$$

Allora esistono intorni $B_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^2, B_\rho(y_0) \subset \mathbf{R}$ in cui esiste un'unica funzione $g : B_\delta(x_0) \to B_\rho(y_0)$ tale che $y_0 = g(x_0)$ e $\Phi(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in B_\delta(x_0)$. Inoltre $g \in C^0(B_\delta(x_0))$.

Se inoltre $\Phi \in C^1(A)$ si ha $g \in C^1(B_\delta(x_0))$ e vale

$$g_{x_i}(x) = -\Phi_{x_i}(x, g(x))/\Phi_y(x, g(x)), \quad x \in B_\delta(x_0)$$

Se inoltre $\Phi \in C^k(A), k \geq 2$ si ha $g \in C^k(B_\delta(x_0))$.

Nel nostro caso $\Phi \in C^\infty$ e calcolando $\Phi_z = 1 + x^2 e^{x+y+z} \geq 1$ si ha globalmente $\Phi_z \neq 0$ e quindi in ogni punto $(x_0,y_0,z_0) \in \Sigma$. Quindi esiste localmente un'unica funzione implicita g di classe C^∞ con $g : B_\delta(x_0,y_0) \to B_\rho(z_0)$ tale che $z_0 = g(x_0,y_0)$ e $\Phi(x,y,g(x,y)) = 0$ per ogni $(x,y) \in B_\delta(x_0,y_0)$.

1b. Per trovare i punti $(x_0,y_0,z_0) \in \Sigma$ tali che $\nabla g(x_0,y_0) = 0$ calcoliamo le derivate parziali di g partendo dalla relazione

$$0 = \Phi(x,y,g(x,y)) = x^2 e^{x+y+g} + g \quad \text{per ogni} \quad (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0).$$

Si trova

$$0 = e^{x+y+g}\left(2x + x^2(1+g_x)\right) + g_x, \quad (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \tag{1}$$

$$0 = e^{x+y+g} x^2 (1+g_y) + g_y, \quad (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \tag{2}$$

Ponendo $g_x = g_y = 0$ il sistema $(1),(2)$ diventa

$$(x^2 + 2x)e^{x+y+g} = 0 \tag{3}$$

$$x^2 e^{x+y+g} = 0 \tag{4}$$

da cui segue $x_0 = 0$. Usando $0 = \Phi(0, y_0, z_0) = z_0$ si trova che i punti richiesti sono della forma

$$(0, y_0, 0) \quad \text{con} \quad y_0 \in \mathbf{R}.$$

Inoltre la funzione implicita $g(x, y)$ soddisfa

$$g(x, y) = -x^2 e^{x+y+g(x,y)} \leq 0$$

e $g(0, y_0) = 0$ e quindi $(0, y_)$ è un punto di massimo globale per g.

1c. Vogliamo mostrare che Σ è globalmente il grafico di una funzione $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Fissiamo $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{R}^2$ e poniamo

$$\varphi(z) = \Phi(\bar{x}, \bar{y}, z) = \bar{x}^2 e^{\bar{x}+\bar{y}+z}.$$

Si trova $\lim_{z\to\pm\infty} \varphi(z) = \pm\infty$ con φ continua su $\mathbf{R}$. Per il teorema degli zeri, esiste almeno un $\bar{z}$ tale che $0 = \varphi(\bar{z}) = \Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Inoltre $\varphi'(z) = 1 + \bar{x}^2 e^{\bar{x}+\bar{y}+z} \geq 1 > 0$ e quindi φ è strettamente crescente da cui segue che $\bar{z}$ è unico. Poniamo $h(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{z}$ per definire una funzione implicita globale che coincide con ogni funzione implicita locale g costruita nella parte **a**.

Esercizio 2.

2a. Una curva continua γ con parametrizzazione $\phi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ si chiama *rettificabile* se esiste finito

$$L(\phi) = \sup_{\mathcal{P}}\{l(\phi_{\mathcal{P}}) : \ \phi_{\mathcal{P}} \text{ poligonale inscritta in } \phi\}$$

dove per una partizione $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b\}$ di $[a, b]$ si definisce

$$l(\phi_{\mathcal{P}}) = \sum_{j=1}^{N} ||\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})||.$$

In tal caso si chiama $L(\gamma) = L(\phi)$ la *lunghezza della curva parametrica* ϕ.

La curva parametrica $\phi(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ per $t \in [0, \pi]$ è una curva di classe $C^\infty[0, \pi] \subset C^1([0, \pi])$ e quindi rettificabile dove si calcola la lunghezza via

$$L(\phi) = \int_0^\pi ||\phi'(t)||\, dt.$$

Si trova

$$||\phi'(t)|| = \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t} = 3|\cos t \sin t| = |\cos t| \sin t$$

per $t \in [0,\pi]$. Quindi

$$L(\gamma) = L(\phi) = \int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t \, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} 3(-\cos t)\sin t \, dt = 3/2 + 3/2 = 3.$$

2b. Vogliamo mostrare che il campo

$$F(x,y) = \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

è conservativo in $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > -|x|\}$. Essendo D stellato (rispetto il punto $(0,1)$ per esempio) e F continua in D (è di classe $C^\infty(D)$) basta mostrare che F è irrotazionale in D ovvero $(F_1)_y = (F_2)_x$ in D. Si trova

$$(F_1)_y = (F_2)_x = \frac{6x^2y - 2y^3}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{per} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Quindi F è conservativo in D; cioè esistono delle funzioni potenziali $\varphi \in C^\infty(D)$ tali che $\nabla\varphi = F$ in D . Facendo delle integrazioni parziali si trova

$$\varphi = \frac{x}{x^2+y^2} + C \quad \text{con} \quad C \in \mathbf{R}.$$

2c. Per calcolare il lavoro effettuato da F lungo γ, il fatto che F è conservativo implica

$$\int_\gamma \langle F, T\rangle \, ds = \int_\gamma \langle \nabla\phi, T\rangle \, ds = \phi(P_2) - \phi(P_1) = -2$$

dove $P_1 = (1,0)$ e $P_2 = (-1,0)$ sono gli estremi del sostegno di γ e φ è qualsiasi delle funzioni potenziali trovate nelle parte **b**.

Esercizio 3.

3a. Def: *Si chiama superficie regolare un'applicazione* $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *tale che*

(SR1) D *è un dominio (la chiusura di un aperto) connesso e* $\Phi \in C^1(D)$.

(SR2) Φ *è iniettiva su* D° *(l'interno di* D*).*

(SR3) *La matrice Jacobiana* $D\Phi(\theta,\varphi)$ *ha rango 2 per ogni* $(u,v) \in D^\circ$.

Nel nostro esempio

$(x,y,z) = \Phi(\theta,\varphi) = ((R + r\cos\varphi)\cos\theta, (R + r\cos\varphi)\sin\theta, r\sin\varphi)$ dove $0 < r < R$

e $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Il dominio D è ovviamente la chisura di un aperto ed è connesso. $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ e quindi vale $(SR1)$.

Per la iniettività $(SR2)$ dobbiamo mostrare che $\Phi(\theta_1, \varphi_1) = \Phi(\theta_2, \varphi_2)$ con $(\theta_i, \varphi_i) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ implica $(\theta_1, \varphi_1) = (\theta_2, \varphi_2)$. Da $z_1 = z_2$ segue che ci sono due casi:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \tag{5}$$

oppure

$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 \quad \text{con} \quad \varphi_1 \neq \varphi_2. \tag{6}$$

Nel primo caso (6) si ha $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$ e quindi da $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ segue che

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2 \quad \text{e} \quad \sin\theta_1 = \sin\theta_2$$

e quindi $\theta_1 = \theta_2$ essendo $\theta_i \in (0, 2\pi)$. Il secondo caso (6) in realtà non è possibile su D° perchè (x_1, y_1) e (x_2, y_2) devono essere equidistante dall'asse z. Infatti da (6) si trova

$$||(x_1, y_1)||^2 = (R + r\cos\varphi_1)^2 \quad \text{e} \quad ||(x_2, y_2)||^2 = (R - r\cos\varphi_1)^2.$$

Queste due quantità non possono essere uguali per $\varphi_1 \neq 0$ e quindi Φ è iniettiva su D°.

Per verificare $(SR3)$ si calcola la matrice Jacobiana

$$D\Phi(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} -(R + r\cos\varphi)\sin\theta & -r\sin\varphi\cos\theta \\ (R + r\cos\varphi)\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ 0 & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Abbiamo rango 2 tranne forse il caso di $\cos\varphi = 0$ ovvero $\varphi = \bar\varphi = \pi/2, 3\pi/2$. In questi casi $\sin\varphi = \pm 1$ e quindi abbiamo

$$D\Phi(\theta, \bar\varphi) = \begin{bmatrix} -R\sin\theta & \mp r\cos\theta \\ r\cos\theta & \mp r\sin\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Questa matrice ha rango 2. Quindi il toro è una superficie regolare.

3b. Per trovare l'equazione del piano tangente $T_{P_0}\Sigma$ al punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \Phi(\pi/3, \pi/4)$ ricordiamo che l'equazione di tale piano è

$$\langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), n \rangle = 0$$

dove n è un vettore normale alla superficie nel punto P_0. Un vettore normale è fornito dal prodotto vettoriale $(\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi)(\theta_0, \varphi_0)$. Nel nostro caso

$$\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -(R + r\cos\varphi)\sin\theta & (R + r\cos\varphi\cos\theta & 0 \\ -r\sin\varphi)\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi \end{vmatrix}$$

e quindi

$$(\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi)(\theta, \varphi) = [(R + r\cos\varphi](r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi) \qquad (7)$$

Adesso usando $\cos\pi/3 = 1/2, \sin\pi/3 = \sqrt{3}/2, \cos\pi/4 = \sin\pi/4 = \sqrt{2}/2$ si trova

$$(\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi)(\pi/3, \pi/4) = \frac{\sqrt{2}r}{2}\left(R + \frac{\sqrt{2}r}{2}\right)\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

e quindi $n = (1/2, \sqrt{3}/2, 1)$. Inoltre

$$(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2}\left(R + \frac{\sqrt{2}r}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(R + \sqrt{2}r), \sqrt{2}r\right)$$

da cui segue

$$T_{P_0}\Sigma: \quad x + \sqrt{3}y + 2z = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{6}\right)\left(R + \frac{\sqrt{2}r}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}r}{2}.$$

N.B. Possiamo usare la formula parametrica del piano tangente

$$(x, y, z) = \Phi(\theta_0, \varphi_0) + \Phi_\theta(\theta_0, \varphi_0)(\theta - \theta_0) + \Phi_\varphi(\theta_0, \varphi_0)(\varphi - \varphi_0)$$

dove Φ_θ e Φ_φ sono la prima e seconda colonna della matrice Jacobiana e $(\theta_0, \varphi_0) = (\pi/3, \pi/4)$.

Ricordiamo che l'area di una superficie regolare è definita da

$$\text{area}(\Phi) = \int\int_D ||\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi||\, d\theta d\varphi.$$

Da formula (7) si trova $||\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi|| = r(R + r\cos\varphi)$ e quindi l'area è

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos\varphi)\, d\theta d\varphi = rR(2\pi)^2 + 2\pi r\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi = 4\pi^2 rR.$$

Esercizio 4.

4a. Teorema: (della divergenza nello spazio) *Siano Ω un dominio regolare nello spazio $\mathbf{R}^3$ e $F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^2)$ Allora si ha*

$$\int\int\int_\Omega \text{div } F\, dxdydz = \int\int_{\partial\Omega} \langle F, n\rangle\, d\sigma$$

dove div $F = (F_1)_x + (F_2)_y + (F_3)_z$ *è la divergenza di* F*,* n *è il versore normale esterno a* $\partial\Omega$*,* $d\sigma$ *è l'elemento d'area sul bordo* $\partial\Omega$*.*
N.B. Il versore n è definito in tutti i punti tranne eventualmente un numero finito e un dominio regolare è l'unione di un numero finito di domini normali regolari. In particolare Ω è la chiusura di un aperto e quindi c'è la regolarità di F fino al bordo.

4b. Vogliamo calcolare il volume di $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ \ y \leq 1-|z|\}$ e l'area di $\Sigma = \partial\Omega$. Il dominio dato è l'intersezione di un cilindro ed un cuneo; il dominio è simmetrico rispetto al piano xy. Il volume può essere calcolato usando la funzione grafico $z = 1-y$ (la superficie superiore del cuneo) sul dominio di integrazione $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Si ha

$$\mathrm{vol}(\Omega) = 2\iint_D (1-y)\,dxdy.$$

Usando coordinate polari e la regolarità della funzione integranda abbiamo

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 1-\rho\sin\theta\,d\theta\right)\rho\,d\rho &= 2\int_0^1 [2\pi-\rho\cos\theta]_{\theta=0}^{2\pi}\,\rho\,d\rho \\ &= 4\pi\int_0^1 \rho\,d\rho = 2\pi. \end{aligned}$$

Denotiamo con $|\partial\Omega|$ l'area del bordo. Per la simmetria di Ω quest'area e due volte l'area della parte con $z \geq 0$ ed è la somma di due parte: **i)** una superficie laterale Σ_L dove $x^2+y^2=1$ e $0 \leq z \leq 1-y$; **ii)** una superficie superiore Σ_S dove $z = 1-y$ e $x^2+y^2 \leq 1$. Abbiamo allora

$$|\Sigma| = 2|\sigma_L| + 2|\Sigma_S|$$

dove

$$|\Sigma_L| = \int_0^{2\pi} z(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} (1-y(\theta))\,d\theta = \int_0^{2\pi} (1-\sin\theta)\,d\theta = 2\pi$$

e

$$|\Sigma_S| = \iint_D \sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\,dxdy$$

dove $z = g(x,y) = 1-y$ è la rappresentazione grafica di Σ_S. Abbiamo $g_x = 0$ e $g_y = -1$ e quindi

$$|\Sigma_S| = \iint_D \sqrt{2}\,dxdy = \sqrt{2}|D| = \sqrt{2}\pi.$$

Quindi $|\Sigma| = (4+2\sqrt{2})\pi$.

4c. Per calcolare il flusso uscente dal bordo $\partial\Omega$ del campo $F(x,y,z) = (x^3, x^2y, x^2z)$ usiamo il teorema della divergenza. Il campo è di classe $C^\infty(\mathbf{R}^3)$ e quindi appartiene allo spazio $C^1(\Omega)$ con Ω un dominio regolare. Si ha

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F, n \rangle \, d\sigma = \iiint_\Omega \text{div } F \, dxdydz = \iiint_\Omega 5x^2 \, dxdydz. \tag{8}$$

La funzione integranda dell'integrale triplo in (8) è pari rispetto a z e il dominio è simmetrico rispetto a z. Quindi il flusso è due volte l'integrale preso sull'insieme Ω^+ definito da: $0 \le z \le 1 - y, (x,y) \in D$ dove D è il disco unitario. Usando coordinate cilindriche e la regolarità della funzione integranda si trova

$$\begin{aligned}
2\iiint_{\Omega^+} 5x^2 \, dxdydz &= 10 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-\rho\sin\theta} \rho^2 \cos^2\theta \rho \, dz \right) d\rho \right) d\theta \\
&= 10 \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3 cos^2\theta (1 - \rho\sin\theta) \, d\rho \right) d\theta \\
&= 10 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} \cos^2\theta - \frac{\rho^5}{5} \cos^2\theta \sin\theta \right) d\theta \\
&= \frac{5}{4} \int_0^{2\pi} (\cos(2\theta) + 1) \, d\theta = \frac{5}{2}\pi.
\end{aligned}$$