Soluzione della Prova Scritta di Analisi Matematica III - 19/06/02

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

1a. Teorema: (di Dini) *Sia* $\Phi : A \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *dove* A *è aperto. Supponiamo*

$$\textbf{i)} \quad \Phi, \Phi_y \in C^0(A)$$

$$\textbf{ii)} \quad \text{esiste } (x_0, y_0) \in A \text{ tale che } \Phi(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Allora esistono intorni $B_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}, B_\rho(y_0) \subset \mathbf{R}$ *in cui esiste un'unica funzione* $g : B_\delta(x_0) \to B_\rho(y_0)$ *tale che* $y_0 = g(x_0)$ *e* $\Phi(x, g(x)) = 0$ *per ogni* $x \in B_\delta(x_0)$. *Inoltre* $g \in C^0(B_\delta(x_0))$.

Se inoltre $\Phi \in C^1(A)$ *si ha* $g \in C^1(B_\delta(x_0))$ *e vale*

$$g'(x) = -\Phi_x(x, g(x))/\Phi_y(x, g(x)), \quad x \in B_\delta(x_0)$$

Se inoltre $\Phi \in C^k(A), k \geq 2$ *si ha* $g \in C^k(B_\delta(x_0))$.

1b. Vogliamo verificare che $\Phi(x, y) = xy^2 + y + \sin(xy) + 3(e^x - 1) = 0$ definisce localmente un'unica funzione implicita $y = g(x)$ vicino il punto $(0, 0)$. Basta controllare l'ipotesi del Teorema di Dini in questo caso. $\Phi \in C^\infty \mathbf{R}^2$ e quindi è regolare quanto vogliamo (basta continua con Φ_y continua in un intorno di $(0, 0)$). Si calcola

$$\Phi_y = 2xy + 1 + x\cos(xy)$$

e quindi $\Phi_y(0, 0) = 1 \neq 0$. Per il Teorema di Dini esiste un'unica funzione implicita $g : B_\delta(0) \to B_\rho(0)$ tale che $0 = g(0)$ e $\Phi(x, g(x)) = 0$ per ogni $(x) \in B_\delta(0)$. Essendo Φ di classe C^∞ si sa che la funzione implicita $g \in C^\infty(B_\delta(0))$.

1c. Vogliamo calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + 5x^2}{x^2}$$

dove g è la funzione implicita definita in parte **1i.**. Il limite ha forma di indecisione $0/0$ essendo g continua con $g(0) = 0$. Si nota che il denominatore ed il secondo termine del numeratore sono infinitesimi di ordine 2. Il termine g è infinitesima di ordine 1 come si vede facendo uno sviluppo di Taylor:

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + o(x) = -3x + o(x) \quad \text{per} \quad x \to 0.$$

Infatti sappiamo già che $g(0) = 0$ e derivando l'equazione

$$0 = \Phi(x, g(x)) = xg^2 + g + \sin(xg) + 3(e^x - 1) \tag{1}$$

rispetto ad $x \in B_\delta(0)$ si trova

$$0 = g^2 + 2xgg' + \cos(xg)[g + xg'] + 3e^x \tag{2}$$

Valutando (2) in $x = 0, g = 0$ si trova $g'(0) = -3$. Quindi abbiamo

$$\frac{g(x) + 5x^2}{x^2} = \frac{-3x + o(x) + 5x^2}{x^2} = \frac{-3 + o(1)}{x} \quad \text{per} \quad x \to 0$$

e quindi il limite non esiste; più precisamente

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{g(x) + 5x^2}{x^2} = \mp\infty.$$

Esercizio 2.

2a. Vogliamo mostrare che il campo vettoriale $F = (F_1, F_2)$ è conservativo in $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ dove

$$F_1(x, y) = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 y} \quad \text{e} \quad F_2(x, y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2)}{xy^2}.$$

Il dominio A è stellato (rispetto al punto $P = (1, 1)$ per esempio) e quindi sappiamo che il campo F sia conservativo in A se e solo se il campo è irrotazionale in A; cioè basta verificare che

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0.$$

Un conto facile ma un po' lungo mostra che

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{2x^2y^2 - 3x^4 - 3y^4}{x^2 y^2} = 2 - 3y^2/x^2 - 3x^2/y^2$$

e quindi F è conservativo in A.

Per trovare le funzioni potenziali φ tali che $\nabla\varphi = F \in C^\infty(A, \mathbf{R}^2)$ cominciamo ricrodando che se φ è una allora tutte sono della forma $\varphi + C$ dovve C è una costante. Per determinarle possiamo fare degli "integrali parziali" partendo dal sistema $(\varphi_x, \varphi_y) = (F_1, F_2)$ oppure sfruttare la formula esplicita

$$\varphi(x,y) = \int_1^y F_2(1,t)\,dt + \int_1^x F_1(t,y)\,dt$$

che dà la funzione potenziale che si annula in $(1,1)$. Calcolando si trova

$$\int_1^y F_2(1,t)\,dt = \int_1^y \frac{(3t^2-1)(1+t^2)}{t^2}\,dt = \int_1^y \left(3t^2 + 2 - \frac{1}{t^2}\right)\,dt$$

e quindi

$$\int_1^y F_2(1,t)\,dt = y^3 + 2y + 1/y - 4. \tag{3}$$

Poi si trova

$$\int_1^x F_1(t,y)\,dt = \int_1^x \frac{(3t^2-y^2)(t^2+y^2)}{t^2 y}\,dt = \frac{1}{y}\int_1^y \left(3t^2 + 2y^2 - \frac{y^4}{t^2}\right)\,dt$$

e quindi

$$\int_1^x F_1(t,y)\,dt = \frac{1}{y}\left[x^3 + 2xy^2 + y^4/x - 1 - 2y^2 - y^4\right]. \tag{4}$$

Sommando le formule (3) e (4) si trova che la funzione potenziale che si annulla in $(1,1)$ è

$$\varphi(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{xy} - 4$$

e tutte le funzioni potenziali sono $C + (x^2+y^2)^2/xy$.

2b. Il lavoro effettuato da F lungo la curva γ con parametrizzazione $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ con $t \in [1,2]$ è per definzione

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_1^2 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

ma essendo F conservativo questo vale

$$\varphi(\gamma(2)) - \varphi(\gamma(1)) = \varphi(4,8) - \varphi(1,1) = \frac{(16+64)^2}{32} - 4 = 196.$$

2c. Di nuovo usando F conservativo con funzione potenziale φ tale che $\varphi(1,1) = 0$ abbiamo

$$\int_{\gamma_T} F \cdot ds = \varphi(\gamma(T)) - \varphi(\gamma(1)) = \varphi(T^2, T^3) = T^3(1+T^2)^2 - 4.$$

La curva γ_T con parametrizzazione $\gamma(t) \in C^1([1,T])$ è rettificabile e la sua lunghezza è

$$L(\gamma_T) = \int_1^T ||\gamma'(t)||\, dt = \int_1^T t\sqrt{4+9t^2}\, dt.$$

Notando che una primitiva della funzione integranda sopra è $(4+9t^2)^{3/2}/27$ si trova

$$L(\gamma_T) = \frac{1}{27}\left[(4+9T^2)^{3/2} - 13^{3/2}\right]$$

e quindi

$$g(T) = \frac{1}{L(\gamma_T)}\int_\gamma F\cdot ds = \frac{27T^3(1+T^2)^2}{(4+9T^2)^{3/2}-13^{3/2}}.$$

Esercizio 3.

3a. Ricordiamo la definizione *Un insieme* $\Sigma = \Phi^{-1}(0)$ *dove* $\Phi : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *si chiama vincolo regolare se* $\Phi \in C^1(D)$ *e vale* $\nabla\Phi \neq 0$ *su* Σ.

Nel nostro esempio $\Phi(x,y,z) = z^2 - xy - 1$ è di classe C^∞ in tutto $\mathbf{R}^3$. Inoltre $\nabla\Phi(x,y,z) = (-y,-x,2z)$ e quindi il gradiente si annula solo nel punto $P = (0,0,0)$. Ma $\Phi(0,0,0) = -1 \neq 0$ e quindi P non è un sul vincolo Σ. Quindi Σ è regolare.

L'equazione del piano tangente ad σ nel punto $(-1,1,0)$ è

$$0 = \langle\nabla\Phi(-1,1,0),(x+1,y-1,z)\rangle = \langle(-1,1,0),(x+1,y-1,z)\rangle$$

ovvero $-x+y-2=0$.

3b. Vogliamo trovare gli estremi locali vincolati di $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ su Σ. Essendo f di classe $C^{infty}(\mathbf{R}^3)$ e $\Sigma = \Phi^{-1}(0)$ regolare possiamo trovare i punti critici vincolati come punti critici liberi della funzione lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f - \lambda\Phi$. Questo sistema di equazioni è

$$0 = \mathcal{L}_x = f_x - \lambda\Phi_x = 2x + \lambda y \tag{5}$$

$$0 = \mathcal{L}_y = f_y - \lambda\Phi_y = 2y + \lambda x \tag{6}$$

$$0 = \mathcal{L}_z = f_z - \lambda\Phi_z = 2z(1-\lambda) \tag{7}$$

$$0 = \mathcal{L}_\lambda = -\Phi = 1 + xy - z^2 \tag{8}$$

Dall'equazione (7) risulta $z = 0 \vee \lambda = 1$ Nel primo caso $z = 0$ le equazioni $(5),(6),(8)$ diventano

$$y = -2x/\lambda;\quad y = -\lambda x/2;\quad y = -1/x$$

da cui segue che i punti critic vincolati in questo caso sono

$$(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = (1, -1, 0, 2), (-1, 1, 0, 2). \tag{9}$$

Nel secondo caso $\lambda = 1$ le equazioni $(5), (6), (8)$ diventano

$$y = -2x; \quad y = -x/2; \quad z^2 = -1 - xy$$

da cui segue che i punti critic vincolati in questo caso sono

$$(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = (0, 0, 1, 1), (0, 0, -1, 1). \tag{10}$$

Per studiare la natura dei punti critici sfuttiamo la forma semplice del vincolo $\Sigma : \Phi(x, y, z) = z^2 - xy - 1 = 0$. Nel secondo caso (formula (10)) si ha $\Phi_z(x_0, y_0, z_0) = 2z_0 \neq 0$ e quindi il vincolo Σ è localmente il grafico di una funzione $z = g(x, y) = \pm\sqrt{1 + xy}$ dove il segno davanti alla radice quadrata è quello di $z_0 = \pm 1$ in (9). Quindi $h(x, y) = f(x, y, g(x, y)) = x^2 + y^2 + 1 + xy$ dà la restrizione di f su Σ vicino questi punti critici vincolati. La loro natura è determinata dalla matrice hessiana di h che è

$$H_h(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

che è definita positiva e quindi $(x_0, y_0, z_0) = (\pm 1, \mp 1, 0)$ sono punti di minimo locale.

Nel primo caso (formula (9)) si ha $\Phi_y(x_0, y_0, z_0) = x_0 \neq 0$ e quindi il vincolo Σ è localmente il grafico di una funzione $y = g(x, z) = (z^2 - 1)/x$. La matrice hessiana di $h(x, z) = f(x, g(x, z), z)$ è

$$H_h(x_0, z_0) = H_h(\pm 1, 0) = \begin{bmatrix} 8 & \pm 1 \\ \pm 1 & -2 \end{bmatrix}$$

che è definita negativa e quindi $(x_0, y_0, z_0) = (\pm 1, \mp 1, 0)$ sono punti sella (non sono estremi locali vincolati).

3c. Per studiare la eventuale presenza di etremi globali per f su Σ notiamo che non c'e' un massimo globale perchè $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ lungo la retta $(0, y, 1) \in \Sigma$ tende al $+\infty$. Abbiamo trovato un minimo locale $1 = f(0, 0, \pm 1)$ che è un minimo globale. Infatti ponendo $z^2 = 1 + xy$ mostra che sul vincolo Σ

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + xy + 1 = \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + 1 \geq 1.$$

Esercizio 4.

4a. Teorema: (della divergenza nello spazio) *Siano Ω un dominio regolare nello spazio $\mathbf{R}^3$ e $F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^3)$ Allora si ha*

$$\iiint_\Omega \text{div } F\, dxdydz = \in\int_{\partial\Omega} \langle F, n\rangle\, d\sigma$$

dove div $F = (F_1)_x + (F_2)_y + (F_3)_z$ *è la divergenza di F, n è il versore normale esterno a $\partial\Omega$, $d\sigma$ è l'elemento d'area sul bordo $\partial\Sigma$.*

N.B. Il versore n è definito in tutti i punti tranne eventualmente un numero finito e un dominio regolare è l'unione di un numero finito di domini normali regolari.

4b. Il dominio dato è l'unione di due domini normali ripetto rispetto all'asse z; i) un cilindro

$$\Omega_1 : \quad [x^2 + y^2 \le 1] \wedge [1 \le z \le 4]$$

e ii) un pezzo di un paraboloide

$$\Omega_2 : \quad x^2 + y^2 \le z \le 1; \quad x^2 + y^2 \le 1.$$

Il volume di Ω_1 è $\pi r^2 h = 3\pi$ ed il volume di Ω_2 si calcola integrando per sezioni $z = z_0$

$$\text{Vol}(\Omega_2) = \int_0^1 \pi z\, dz = \frac{\pi}{2} z^2|_0^1 = \pi/2.$$

Quindi $\text{Vol}(\Omega) = \pi(3 + 1/2) = 7\pi/2$.

Per calcolare il flusso di F uscente dal bordo $\partial\Omega$ appliciamo il teorema della divergenza

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F, n\rangle\, d\sigma = \iiint_\Omega \text{div } F\, dxdydz = \iiint_\Omega 1\, dxdydz = \text{Vol}(\Omega) = 7\pi/2.$$

4c. Il bordo Σ di Ω è l'unione di tre superficie: i) un disco Σ_1 di raggio 1 (a quota $z = 4$); ii) la parte laterale di un cilindro di raggio 1 ed altezza 3; iii) un paraboloide

$$\Sigma_3 : \quad z = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Si ha

$$\text{Area}(\Sigma_1) = \pi r^1 = \pi, \quad \text{Area}(\Sigma_1) = 2\pi r h = 6\pi$$

e si calcola l'area del grafico $\Sigma_3 : z = f(x,y) = x^2 + y^2$ come

$$\text{Area}(\Sigma_3) = \int\int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy = \int\int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy.$$

Usando coordinate polari in D si trova

$$\text{Area}(\Sigma_3) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4\rho^2}\rho d\theta d\rho = \frac{\pi}{6}(1 + 4\rho^2)^{3/2}|_0^1$$

e quindi

$$\text{Area}(\Sigma) = 7\pi + \frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1).$$