Soluzione della Seconda Prova Intermedia di Analisi Matematica III - 31/01/02

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

1a.

Def: *Si chiama superficie regolare un'applicazione* $\Phi : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *tale che*

(SR1) *D è un dominio (la chiusura di un aperto) connesso e* $\Phi \in C^1(D)$.

(SR2) *Φ è iniettiva su D° (l'interno di D).*

(SR3) *La matrice Jacobiana $D\Phi(u,v)$ ha rango 2 per ogni* $(u,v) \in D^\circ$.

Def: *Sia $\omega = F_1\, dx_1 + F_2\, dx_2 + F_3\, dx_3$ una forma differenziale lineare con coefficienti $F_i \in C^0(\mathbf{R}^3)$ per $i = 1,2,3$. Si chiama ω esatta in $\mathbf{R}^3$ se esiste $f \in C^1(\mathbf{R}^3)$ tale che $F = \nabla f$ in $\mathbf{R}^3$. Si chiama ω chiusa in R^3 se $F_i \in C^1(\mathbf{R}^3)$ e valgono l'equazioni*

$$\frac{\partial F_i}{\partial_{x_j}} - \frac{\partial F_j}{\partial_{x_i}} = 0 \text{ in } R^3 \text{ per } i \neq j;$$

cioè se $\operatorname{rot} F = 0$ *in* $\mathbf{R}^3$ *dove* $F = (F_1, F_2, F_3)$.

1b. Il dominio D è ovviamente la chisura di un aperto ed è connesso. $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ e quindi vale $(SR1)$. Per la iniettività $(SR2)$ si nota che $\Phi(u_1, v_1) = \Phi(u_2, v_2)$ implica subito che $u_1 = u_2$ e $v_1 = v_2$; infatti, Φ è iniettiva su tutto $\mathbf{R}^2$. La matrice Jacobiana è

$$D\phi(u,v) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2u & 2v \end{bmatrix}$$

e ha rango 2 per ogni (u,v) avendo due righe linearmente indipendente e quindi vale anche $(SR3)$. **N.B.** È anche chiaro che Φ è una superficie regolare con bordo ed è stokiana.

Ricordiamo che l'area di una superficie regolare è definita da

$$\text{area}(\Phi) = \int\int_D ||\Phi_u \wedge \Phi_v||\, dudv$$

dove $\Phi_u = (0,1,2u)$ e $\Phi_v = (-1,0,2v)$ da cui segue

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2u \\ -1 & 0 & 2v \end{vmatrix} = (2v, -2u, 1)$$

Quindi $||\Phi_u \wedge \Phi_v|| = \sqrt{4v^2 + 4u^2 + 1}$. Passando ai coordinati polari si trova

$$\text{area}(\Phi) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4\rho^2}\rho \, d\rho d\theta = 2\pi \frac{2}{3}\frac{1}{8}(1 + 4\rho^2)^{3/2}|_0^1$$

Quindi l'area vale $\pi(5^{3/2} - 1)/6$.

1c. Si vede facilmente che ω non è chiusa in R^3 essendo

$$\text{rotF} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xe^z & z & xy \end{vmatrix} = (x-1, xe^z - y, 0)$$

e quindi ω non è neanche esatta in R^3 perchè tutte le forme esatte (con coefficienti C^1) sono chiuse.

Per calcolare l'integrale di linea si può procedere direttamente oppure si può applicare il teorema di Stokes dove abbiamo notato che Φ è stokiana. Inoltre il campo F è $C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ e quindi C^1 in un intorno del sostegno Σ di Φ. Questo sostegno Σ è la superficie laterale di un paraboloide ovvero il grafico $z = x^2 + y^2$ per $x^2 + y^2 \leq 1$. Il suo bordo $\gamma = \partial\Sigma$ è un cerchio $x^2 + y^2 = 1$ che sta a quota $z = 1$ che viene fornita con l'orientazione antiorario rispetto il piano xy. Questa curva è anche il bordo della superficie $\widetilde{\Sigma}$ formato dal disco chiuso a quota $z = 1$. Quindi si trova

$$\int_{\gamma^+} \omega = \int_{\widetilde{\Sigma}} \langle \text{ rot } F, n \rangle \, d\sigma$$

dove $n = (1,0,0)$ dà l'orientazione su $\widetilde{\Sigma}$ compatibile con il verso di γ^+. Essendo n ortogonale al rotore di F su $\widetilde{\Sigma}$ l'integale vale zero.

Esercizio 2.

2a. La regione Ω data non è limitato e quindi cerchiamo di definire il suo volume in senso generalizzato. Si pone $|\Omega| = \lim_{T \to +\infty} |\Omega_T|$ se questo limite esiste finito dove

$$\Omega_T = \{(x,y,z) \in \Omega : z \leq T\}$$

Questo dominio troncato Ω_T è misurabile secondo Peano-Jordan (è un dominio regolare) e quindi si sa

$$|\Omega_T| = \int_{\Omega_T} dxdydz.$$

Per calcolare questo volume usiamo i stratti in z; cioè

$$\int_{\Omega_T} dxdydz = \int_0^T \left(\int\int_{D_z(h)} dxdy \right) dh$$

dove $D_z(h) = \{(x,y,z) \in \Omega_T : z = h\}$. L'integrale doppio un $D_z(h)$ dà l'area di un disco $D_z(h)$ di raggio $(1+h)^{-2/3}$ e quindi abbiamo

$$\int_{\Omega_T} dxdydz = \int_0^T \pi(1+h)^{-4/3}\, dh = 3\pi \left(1 - (1+T)^{-1/3}\right).$$

Prendendo il limite per $T \to +\infty$ si trova $|\Omega| = 3\pi$. **N.B.** Si può anche calcolare il volume di Ω_T tramite le coordinate cilindriche.

2b. Dato il fatto che Ω ha volume finito ha senso definire il valor medio

$$\bar{f}_{|\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f\, dxdydz$$

dove si interpreta nuovamente l'integrale in senso improprio. Calcolando in modo analogo

$$\int_\Omega f\, dxdydz = \lim_{T\to+\infty} \int\int\int_{\Omega T} f\, dxdydz = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T \left(\int\int_{D_z(h)} f\, dxdy \right) dh$$

dove la funzione f è costante e vale $(1+h)^{1/4}$ sullo strato $D_z(h)$. Quindi il limite da calolare è

$$\lim_{T\to+\infty} \int_0^T \left(\int\int_{D_z(h)} \pi(1+h)^{-13/12} \right) dh = \lim_{T\to+\infty} 12\pi \left(1 - (1+T)^{-1/12}\right) = 12\pi.$$

Quindi il valor medio vale 4.

2c. Siamo tentati ad applicare direttamente una versione del teorema della divergenza ad Ω illimitato; cioè

$$\int\int_{\partial\Omega} \langle F, n\rangle\, d\sigma = \int\int\int_\Omega \operatorname{div} F\, dxdydz = \int\int\int_\Omega f\, dxdydz = 12\pi.$$

Per giustificarlo dobbiamo fare un processo al limite simile e quello fatto sopra. Applicando il teorema della divergenza al dominio Ω_T e usando $\operatorname{div} F = f$ si ha

$$\int\int_{\partial\Omega_T} \langle F, n\rangle \, d\sigma = \int\int\int_{\Omega_T} f \, dxdydz.$$

Il membro destro sopra tende a 12π per $T \to +\infty$. Il membro sinistro può essere spezzato in due integrali di superficie così

$$\int\int_{\partial\Omega\cap\{(x,y,z):z\leq T\}} \langle F, n\rangle \, d\sigma + \int\int_{\Sigma_T} \langle F, n\rangle \, d\sigma$$

dove il primo tende al flusso di F attraverso il bordo di Ω in senso generalizzato e il secondo deve essere mandato a zero. Non è così facile farlo in generale, ma per $F = (0, 0, 5(1+z)^{5/4}/4)$ per esempio (che ha divergenza uguale ad f) si trova

$$\langle F, n\rangle = \frac{5}{4}(1+T)^{5/4} \quad \text{su} \quad \Sigma_T$$

e quindi l'integrale su Σ_T vale $5\pi(1+T)^{-4/3+5/4}/4$ che tende a zero.

Esercizio 3. (corso avanzato)

3a. Essendo $u \in C^2(B_2(0)) \cap C^0(\overline{B_2(0)})$ una funzione armonica in $\Omega = B_2(0)$ possiamo applicare il principio di massimo per concludere

$$\frac{\max}{B_2(0)} / \frac{\min}{B_2(0)} u = \max_{\partial B_2(0)} / \min_{\partial B_2(0)} u.$$

Qui il bordo $\partial B_2(0)$ è un cerchio di raggio 2 che puo essere parametrizzato tramite $(x, y) = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. Essendo $u = g$ sul bordo si ha

$$u_{|\partial B_2(0)}(\theta) = 2\cos\theta + 4\sin^2\theta \leq 6 < 7.$$

Quindi la risposta è no.

3b. Usando la proprietà del valor medio per le funzioni armoniche sappiamo

$$u(0,0) = \overline{u}_{|\partial B_2(0)} = \frac{1}{|\partial B_2(0)|}\int_{\partial B_2(0)} u \, ds.$$

Si sa $|\partial B_2(0)| = 4\pi$ e sfruttando la parametrizzazione sopra si calcola

$$\int_{\partial B_2(0)} u \, ds = 2\int_0^{2\pi} \left(2\cos\theta + 4\sin^2\theta\right) \, d\theta = 8\pi$$

Quindi $u(0,0) = 2$.