Soluzione della Prova Scritta di Analisi Matematica III - 28/01/05

C.L. in Matematica e Matematica per le Applicazioni

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

1a. Teorema: (di Dini) *Sia $\Phi : A \subseteq \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dove A è aperto. Denotiamo con $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ un elemento generico di A. Supponiamo*

$$\mathbf{i)}\quad \Phi, \Phi_y \in C^0(A)$$

$$\mathbf{ii)}\quad \text{esiste } (x_0, y_0) \in A \text{ tale che } \Phi(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \Phi_y(x_0, y_0) \neq 0$$

Allora esistono intorni $B_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^2, B_\rho(y_0) \subset \mathbf{R}$ in cui esiste un'unica funzione $g =: B_\delta(x_0) \to B_\rho(y_0)$ tale che $y_0 = g(x_0)$ e $\Phi(x, g(x)) = 0$ per ogni $x \in B_\delta(x_0)$. Inoltre $g \in C^0(B_\delta(x_0), \mathbf{R})$.

Se inoltre $\Phi \in C^1(A)$ si ha $g \in C^1(B_\delta(x_0), \mathbf{R})$ e vale

$$g_{x_i}(x) = -\Phi_{x_i}(x, g(x))/\Phi_y(x, g(x)), \quad x \in B_\delta(x_0), \quad i = 1, 2$$

Se inoltre $\Phi \in C^k(A), k \geq 2$ si ha $g \in C^k(B_\delta(x_0))$.

1b. Si nota che $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ e quindi per il teorema di Dini ci serve $\nabla\Phi \neq 0$ su $\Gamma = \Phi^{-1}(\Omega)$. Si trova

$$\nabla\Phi = (2xy^3, 3x^2y^2 + 2y, 2z) = (0, 0, 0)$$

implica $z = 0$ e $x = 0 \vee y = 0$ dalle prima e terza equazione. Nel caso $z = x = 0$ la seconda equazione implica $y = 0$; ma $(0, 0, 0) \notin \Gamma$. Nel caso $z = y = 0$ la seconda equazione lascia x arbitrario. Ma $\Phi(x, 0, 0) = -1 \neq 0$ e qiondi $(x, 0, 0) \notin \Gamma$. Quindi localmente Γ è una superficie di classe C^∞.

1c. Vogliamo trovare i candidati per gli estremi locali di $f_{|\Gamma}$ dove $f(x, y, z) = y^3x^2 + z^2$. Essendo $f \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ ed il vincolo Γ regolare (per la parte **b**), gli unici candidati per gli estremi locali di f sono i punti critici della lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f - \lambda\Phi$. Il sistema per i punti critici di $\mathcal{L}$ è

$$0 = \mathcal{L}_x = 2xy^3 - \lambda 2xy^3 = 2xy^3(1 - \lambda) \tag{1}$$

$$0 = \mathcal{L}_y = 3x^2y^2 - \lambda(3x^2y^2 + 2y) = 3x^2y^2(1-\lambda) - 2y\lambda \tag{2}$$

$$0 = \mathcal{L}_z = 2z - \lambda(2z) = 2z(1-\lambda) \tag{3}$$

$$0 = \mathcal{L}_\lambda = -(y^3x^2 + y^2 + z^2 - 1) \tag{4}$$

Risolvendo il sistema si trova da (3) $z = 0 \vee \lambda = 1$.

Nel caso $\lambda = 1$: da (2) segue $y = 0$ e poi da (4) segue $z^2 = 1$ e qiundi $z = \pm 1$. Le equzioni (1) e (3) lasciano x arbitrario. Quindi si ha punti critici vincolati:

$$(x_0, y_0, z_0; \lambda_0) = (x, 0, \pm 1; 1), \quad x \in \mathbf{R} \tag{5}$$

Nel caso $\lambda \neq 1$ ma $z = 0$: da (1) segue $x = 0 \vee y = 0$, ma $y \neq 0$ se $z = 0$ (la (4) non è soddisfata). Nel caso $x = 0$ si trova da (2) che $y = 0 \vee \lambda = 0$, ma di nuovo $y \neq 0$ se $z = 0$. Quindi rimane $(x, z, \lambda) = (0, 0, 0)$. Dalla (4) segue $y = \pm 1$ e quindi si ha i punti critici

$$(x_0, y_0, z_0; \lambda_0) = (0, \pm 1, 0; 0) \tag{6}$$

Rimane solo a studiare la natura dei punti $(P; \lambda)$ nelle formule (5) e (6). Per questo serve analizzare la forma quadratica $H_{f-\lambda_0\Phi}(P)$ sullo spazio tangente $T_P\Gamma$. Si ha

$$H_{f-\Phi} = \begin{bmatrix} 2y^3 & 6xy^2 & 0 \\ 6xy^2 & 6x^2y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2y^3 & 6xy^2 & 0 \\ 6xy^2 & 6x^2y + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$(P; \lambda)$ della forma (5): In questo caso $\nabla\Phi(x, 0, \pm 1) = (0, 0, \pm 2) \perp T_P\Gamma$ e quindi una base per $T_P\Gamma$ è $\{e_1, e_2\}$; cioè $v \in T_P\Gamma$ se e solo se $v = v_1e_1 = v_2e_2$. Calcolando la forma quadratica $Q = \langle v, H_{f-\lambda\Phi}v$ in questo caso usando (5), (7) si trova

$$Q(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = -2v_2^2 \leq 0$$

Quindi i punti $(x, 0, \pm 1)$ sono massimi locali per f dove $(f(x, 0, \pm 1) = 1$.

$(P; \lambda)$ della forma (6): In questo caso $\nabla\Phi(0, \pm 1, 0) = (0, \pm 2, 0) \perp T_P\Gamma$ e quindi una base per $T_P\Gamma$ è $\{e_1, e_3\}$; cioè $v \in T_P\Gamma$ se e solo se $v = v_1e_1 = v_3e_3$. Calcolando la forma quadratica $Q = \langle v, H_{f-\lambda\Phi}v$ in questo caso usando (5), (8) si trova

$$Q(v_1, v_3) = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{bmatrix} = \pm 16v_1^2 + 2v_3^2$$

Quindi il punto $(0,1,0)$ è un minimo locale per f dove $f(0,1,0)=0$ mentre il punto $(0,-1,0)$ non è nè massimo nè minimo locale.

FACOLTATIVO: Per trattare gli estremi globali si nota che $f_{|\Gamma} = 1 - y^2 \leq 1$ (si ha $y^3x^2 + z^2 = 1 - y^2$ su Γ). Quindi $f_{|\Gamma}$ è limitato superiormente e abbiamo visto che $f(x,0,\pm 1) = 1$ e quindi l'estremo superiore è un massimo ed è 1. Invece, f non è limitata inferiormente su Γ; per esempio, sulla sezione $z=0$ di Γ si ha $y = -1/x^2$. Quindi per $x \to 0$ si ha $y \to -\infty$ e quindi anche $f \to -\infty$.

Esercizio 2.

2a. Ricordiamo che una curva continua γ con parametrizzazione $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ si chiama *rettificabile* se esiste finito

$$L(\varphi) = \sup_{\mathcal{P}} \{ l(\varphi_{\mathcal{P}}) : \ \varphi_{\mathcal{P}} \text{ poligonale inscritta in } \varphi \}$$

dove per una partizione $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b\}$ di $[a,b]$ si definisce

$$l(\varphi_{\mathcal{P}}) = \sum_{j=1}^{N} ||\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})||.$$

In tal caso, si chiama lunghezza il numero $L(\varphi)$ che è questo estremo superiore. Abbiamo visto che la lunghezza non dipende nè dalla orientazione nè dalla parametrizzazione nel senso che se esiste un omeomorfismo $g : [\alpha, beta] \to [a,b]$ con $t = g(s)$ allora $L(\psi) = L(\varphi)$ dove $\psi(s) = \varphi(g(s))$. In tal caso si dice che ψ e φ sono parametrizzazini equivalenti nel senso C^0.

2b. La parametrizzazione $\varphi(t) = (9t^2, t, 4t^{3/2}), t \in [0,2]$ è di classe $C^1([0,2]; \mathbf{R}^3)$ e quindi $\gamma = \varphi([0,2])$ è il sostegno di una curva rettificabile con lunghezza calcolabile tramite l'integrale

$$L(\varphi) = \int_0^2 ||\varphi'(t)||\, dt.$$

Calcolando si trova $||\varphi'(t)||^2 = (18t)^2 + 1 + (6t^{1/2})^2 = (18t+1)^2$. Quindi si ha

$$L(\varphi) = \int_0^2 (18t+1)\ dt = (9t^2 + t)|_0^2 = 38. \tag{8}$$

Adesso vogliamo calcolare il valor medio $\bar{f}_{|\gamma} = L(\gamma)^{-1} \int_\gamma f\, ds$ con $f(x,y,z) = e^y$. Si ha

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma f\,ds &= \int_0^2 f(\varphi(t))||\varphi'(t)||\,dt = \int_0^2 (e^t + 36t^{7/2})(18t+1)\,dt \\
&= 19e^2 + 17 + \frac{1296}{11}2^{11/2} + 8\cdot 2^{9/2}
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato integrazione per parti. Il valor medio è

$$
\bar{f}_{|\gamma} = (38)^{-1}\left[19e^2 + 17 + 2^{11/2}\frac{1340}{11}\right].
$$

2c. Per trovare la parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco di γ ricordiamo che per una curva C^1 il parametro di lunghezza d'arco è

$$
s = s(t) = \int_0^t ||\varphi'(\tau)||\,d\tau.
$$

La formula (8) mostra che

$$
s = s(t) = 9t^2 + t, t \in [0,2]
$$

dove $s : [0,2] \to [0,38]$ è una biezione di classe C^∞ con inversa

$$
t = t(s) = \frac{-1+\sqrt{1+36s}}{18}
$$

e quindi abbiamo

$$
\gamma(s) = \varphi(t(s)), \quad s \in [0,38]
$$

Esercizio 3.

3a. Ricordiamo che una forma differenziale $\omega = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ con $F_i(x,y,z) \in C^0(\mathbf{R}^3)$ è detta esatta se $\omega = df$ per qualche funzione differenziabile f. Inoltre essendo $\mathbf{R}^3$ stellato rispetto all'origine ω è esatta se e solo se ω è chiusa in $\mathbf{R}^3$ (cioè rot$F = 0$ ovvero vale il sistema di equazioni: $\partial F_i/\partial_{x_j} = \partial F_j/\partial_{x_i}$ per $i \neq j$). Quindi basta controllare che la nostra forma con $(F_1, F_2, F_3) = (g, 2xy+z, y+2z)$ sia chisua. Si calcola

$$
0 = \text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ g & 2xy+z & y+2z \end{vmatrix} = (0, g_z, 2y - g_y) \qquad (9)
$$

Quindi g deve soddisfare $g_z = 0$ e $g_y = 2y$ e quindi $g(x, y, z) = y^2 + h(x)$ dove h è arbitraria, ma è stato chiesto anche $h(x, 0, z) = 0$ per ogni $(x, z) \in \mathbf{R}^2$ e quindi $h(x) = 0$ per ogni x ovvero $g(x, y, z) = y^2$.

3b. Per trovare una funzione primitiva f per $\alpha = y^2\,dx + (2xy + z)\,dy = (y + 2z)\,dz$ basta notare che il sistema

$$f_x(x, y, z) = y^2, f_y(x, y, z) = 2xy + z, f_z(x, y, z) = y + 2z$$

ha soluzione

$$f(x, y, z) = yz + xz^2 + z^2 + C, \quad C \in \mathbf{R}$$

N.B. Si può anche calcolare f tramite un opportuno integrale di linea. In particolare, la primitiva che si annula nell'origine è la funzione

$$f(x, y, z) = \int_{\gamma(x,y,z)} \alpha = \int_0^1 \left(3t^2xy^2 + 2tyz + 2tz^2\right)\,dt$$

dove $\gamma(t) = (tx, ty, tz),\ t \in [0, 1]$ il segmento che va dall'origine al punto (x, y, z) in $\mathbf{R}^3$ stellato rispetto all'origine.

Per calcolare invece l'integrale $\int_\gamma \alpha$ dove γ è la curva oreintata con parametrizzazione $\varphi(t) = (t, t^2, 3 - t),\ t \in [0, 2]$ basta ricordare che α esatta con primitiva f implica

$$\int_\gamma \alpha = f(P_2) - f(P_1)$$

dove $P_1, P_2 = \varphi(0), \varphi(2)$ gli estremi di γ. Si trova $P_1 = (2, 4, 1)$ e $P_2 = (0, 0, 3)$ e quindi

$$\int_\gamma \alpha = (32 + 4 + 1) - 9 = 28$$

3c. Per calcolare l'integrale di linea di $\alpha = y^2 + 2y\,dx + (2xy + z)\,dy = (y + 2z)\,dz$ sul γ piana semplice regolare che racciude un dominio D nel piano $z = 0$ di area $|D|_2 = 10$ e con la orientazione positiva (che lascia l'interno di D sulla sinistra possiamo usare o il Teorema di Stokes oppure quello di Gauss-Green. L'argomento via Gauss-Green è il seguente. La forma sul piano $z = 0$ è

$$\alpha = y^2 + 2y\,dx + 2xy\,dy := P\,dx + Q\,dy$$

dove si nota $dz = 0$ su $z = 0$. Essendo D un dominio piano e regolare possiamo identificare D con un dominio regolare in $\mathbf{R}^2$. Le funzioni P, Q sono di classe C^∞ e quindi per il Teorema di Gauss-Green abbiamo

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma P\,dx + Q\,dy &= \iint_D (Q_x - P_y)\;dxdy \\
&= \iint_D (2y - 2y - 2)\,dxdy = -2|D|_2 = -20
\end{aligned}
$$

N.B. L'argomento via il Teorema di Stokes nello spazio è simile. L'insieme $\Sigma = D$ pensato nello spazio è una superficie Stokiana (perchè?) con bordo γ^+ se prendiamo l'orientazione $\nu = (0,0,1)$ su Σ. Quindi si ha

$$
\int_\gamma \alpha = \iint_\Sigma \langle \mathrm{rot}\alpha, \nu\rangle d\sigma
$$

e si può usare la parametrizzazione $\Phi(x,y) = (x,y,0)$ di D e calcolare.

Esercizio 4.

4a. Ricordiamo il Teorema della Divergenza nello spazio:

Teorema: *Siano $F \in C^1(\Omega;\mathbf{R}^3)$ e Ω un dominio regolare. Allora*

$$
\iiint_\Omega \mathrm{div}F\;dxdydz = \iint_{\partial\Omega} \langle F,\nu\rangle\;d\sigma \tag{10}
$$

dove $d\sigma$ è l'elemento d'area su $\Sigma = \partial\Omega$, ν è il versore normale esterno al bordo, e $\mathrm{div}F = \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} F_{x_j}$ *è la divergenza di F.*

Ricordiamo inoltre che un dominio $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ è regolare $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $\Omega = \bigcup_{k=1}^N \Omega_K$ dove

1. Ω_k è normale e regolare rispetto un'asse x_j, $j = 1,2,3$
2. $\Omega_j^\circ \cap \Omega_j^\circ = \emptyset$, $j \neq k$.

Per la condizione 1, ricordiamo che Ω è normale regolare ripsetto a z (per esempio) $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ esistono due funzioni $\alpha, \beta \in C^1(D;\mathbf{R})$ con $D \subset \mathbf{R}^2$ un dominio regolare t.c.

$$
\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \quad \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y), \quad (x,y) \in D\}.
$$

Adesso affrontiamo l'esercizio. Vogliamo mostrare che si può applicare il teorema se

$$
\begin{gathered}
F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2 - 3z + 2 \\
\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \quad x^2 + y^2 \le z^2, \quad 1 \le z \le 2\}
\end{gathered}
$$

Si ha $F \in C^\infty(\mathbf{R}^3;\mathbf{R}^3)$ e quindi F è abbastanza regolare. Il dominio è un cono troncato; cioe il pezzo del cono definito da $z \ge ||(x,y)|| = \sqrt{x^2+y^2}$ tagliato con il vincolo $1 \le z \le 2$. Dividendo $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ dove Ω_1 è il cilindro

$$\Omega_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3: \quad 0 \le z \le 2, \quad ||(x,y)|| \le 1\}$$

e Ω_2 la chiusura del suo complemento rispetto Ω

$$\Omega_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3: \quad ||(x,y)|| \le z \le 2, \quad 1 \le ||(x,y)|| \le 2\}$$

abbiamo che Ω è un dominio regolare. I pezzi Ω_k sono regolare normale rispetto l'asse z dove si nota che i due domini bidimensionali usati

$$D_1 = \overline{B}_1(0) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2: \quad ||(x,y)| \le 1\}$$
$$D_2 = \overline{B}_2(0) \setminus B_1(0) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2: \quad 1 \le ||(x,y)| \le 2\}$$

sono regolari. Quindi F, Ω sono ammissibili per il teorema.

4b. Volgiamo verificare la tesi del Teorema (formula (10) con Ω e F definiti nella parte **a**. Per l'integrale su Ω

$$\iiint_\Omega \mathrm{div} F \, dxdydz = \iiint_\Omega (2x + 2y + 2z - 3) \; dxdydz$$

dove si nota che le fuzioni $2x$ e $2y$ sono dispari in x e y respettivamente ed il dominio è simmetrico rispetto le asse di x e y. Quindi si ha

$$\iiint_\Omega \mathrm{div} F \, dxdydz = \iiint_\Omega (2z - 3) \; dxdydz \tag{11}$$

Il dominio anche ha una simmetria cilindrica e quindi usiamo coordinate cilindriche $(x,y,z) = \Phi(\rho,\theta,z)$ dove

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta$$

ed il dominio Ω si trasforma in

$$\Omega^* = \{(\rho,\theta,z): \quad \theta \in [0,2\pi], \quad 0 \le \rho \le z, \quad z \in [1,2]\}$$

Si ricorda che lo jacobiano della trasformazione soddisfa $|J_\Phi(\rho,\theta,z)| = \rho$ e quindi per il cambiamento di variabili ed il teorema della riduzione il membro destro della (11) diventa

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega (2z-3) \; dxdydz &= \iiint_{\Omega^*} (2z-3) \; |J_\Phi| \, d\rho d\theta dx \\
&= \int_1^2 \int_0^z \int_0^{2\pi} (2z-3) \, \rho \, d\theta d\rho dz \\
&= 2\pi \int_1^2 \left(\int_0^z ((2z-3)\rho \, d\rho) \; dz \right) \\
&= \pi \int_1^2 \left((2z-3) z^2 \right) \; dz
\end{aligned}$$

Calcolando quest'ultimo integrale unidimensionale si trova

$$\iiint_\Omega \mathrm{div} F \, dxdydz = \frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

Adesso calcoliamo l'integrale di superficie in (10). Il bordo si spezza in $\partial\Omega = \Sigma_S \cup \Sigma_I \cup \Sigma_L$ le parti superiore, inferiore e laterale dove gli sostegni sono

$$\begin{aligned} \Sigma_S &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \quad ||(x,y)|| \le 2, \quad z = 2\} \\ \Sigma_I &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \quad ||(x,y)|| \le 2, \quad z = 1\} \\ \Sigma_L &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \quad z = ||(x,y)||, \quad 1 \le ||(x,y)|| \le 2\} \end{aligned}$$

Su Σ_S che è un grafico $z = 2$ con $(x,y) = \overline{B}_2(0)$ il versore normale esterno è $\nu = (0,0,1)$ e l'elemento d'area è $d\sigma = dxdy$. Quindi

$$\iint_{\Sigma_S} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma = \iint_{\Sigma_S} (-z^2 + 3z - 2)_{|z=2} \, d\sigma = \iint_{\overline{B}_2(0)} 0 \, dxdy = 0 \tag{13}$$

In un modo analogo, su Σ_I, dove $z = 1$ con $(x,y) \in \overline{B}_1(0)$, si ha $\nu = (0,0,-1)$ e $d\sigma = dxdy$ e quindi

$$\iint_{\Sigma_I} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma = \iint_{\Sigma_S} (-z^2 + 3z - 2)_{|z=1} \, d\sigma = \iint_{\overline{B}_1(0)} 0 \, dxdy = 0 \tag{14}$$

per l'ultimo integrale su Σ_L si può usare la sua rappresentazione come grafico $z = ||(x,y)||$ per $||(x,y)|| \in \overline{B}_2(0) \setminus \overline{B}_1(0)$ oppure si può sfuttare la simmetria cilindrica usando direttamente la parametrizzazione

$$\Phi(\theta, z) := (z\cos\theta, z\sin\theta, z), \quad (\theta, z) \in D := [0, 2\pi] \times [1, 2].$$

per cui

$$\Phi_\theta \wedge \Phi_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -z\sin\theta & z\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix} = (z\cos\theta, z\sin\theta, -z)$$

e quindi punta nella direzione giusta (il componente della z è negativa). Rispetto questa parametrizzazione si ha

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_L} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma &= \iint_D \langle F(\Phi(\theta,z), \Phi_\theta \wedge \Phi_z \rangle \, d\theta dz \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left[z^3 \cos^3\theta + z^3 \sin^3\theta - (z^3 - 3z^2 + 2z) \right] \, d\theta \right), \, dz \\ &= 2\pi \int_1^2 \left(-z^3 + 3z^2 - 2z \right) \, dz \end{aligned} \tag{15}$$

dove abbiamo usato $\cos^3\theta = (1-\sin^2\theta)\cos\theta$ e $\sin^3\theta = (1-\cos^2\theta)\sin\theta$ per vedere

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\theta = 0 = \int_0^{2\pi} \sin^3\theta\, d\theta.$$

Calcolando l'ultimo integrale in (15) si trova

$$\iint_{\Sigma_L} \langle F, \nu\rangle\, d\sigma = \frac{\pi}{2} \tag{16}$$

e combinando $(13), (14), (16)$ si trova

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle\, d\sigma = \frac{\pi}{2}$$

che è d'accordo con (12).

4c. Vogliamo calcolare l'integrale

$$I := \iiint_{\Omega} (xg_x + yg_y + zg_z)\, dxdydz \tag{17}$$

dove $g \in C^1(\Omega)$ con $\Omega\overline{B}_1(0)$ e sapendo i valor medi

$$\bar{g}_{|\Omega} = A \quad \text{e} \quad \bar{g}_{|\partial\Omega} = B. \tag{18}$$

La funzione integranda in (17) può essere scritta (usando il suggerimento) come

$$(xg)_x - g + (yg)_y - g + (zg)_z - g = \operatorname{div}(xg, yg, zg) - 3g.$$

Inserendo quest'indentità nella (17) ed applicando il Teorema della divergenza ($F = (xg, yg, zg) \in C^1(\Omega; \mathbf{R}^3)$ e Ω dominio regolare) si trova

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} [\operatorname{div}(xg, yg, zg) - 3g]\; dxdydz \\ &= \iint_{\partial\Omega} g\langle (x,y,z), \nu\rangle\, d\sigma - 3\iiint_{\Omega} g\, dxdydz \\ &= \iint_{\partial\Omega} g d\sigma - 3\iiint_{\Omega} g\, dxdydz \end{aligned}$$

dove abbiamo usato $\nu = (x, y, z)$ su $\partial\Omega$, e quindi $\langle (x,y,z), \nu\rangle = ||(x,y,z)||^2 = 1$. Usando allora i dati (18) e formule geometriche si trova

$$I = |\partial\Omega|_2\, \bar{g}_{|\partial\Omega} - 3|\Omega|_3\, \bar{g}_{|\Omega} = 4\pi(B - A)$$