PROVA SCRITTA DI ANALISI II – 31/01/2000

Allievi Ingegneri Aerospaziali

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

a. Enunciare il Teorema di Dini delle funzioni implicite per funzioni $g : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$.

b. Siano $g : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $g(x,y,z) = xyz^2 - 4$ e E_0 la superficie data da $E_0 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}$. Stabilire per quali $(x,y,z) \in E_0$ la superficie è esplicitabile localmente come un grafico $z = h(x,y)$. Trovare l'equazione del piano tangente ad E_0 nel punto $(1,1,2)$.

c. Stabilire per quali $(x,y,z) \in E_0$ il vincolo E_0 è regolare. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, determinare i punti critici della funzione $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ vincolati all'insieme E_0. Dedurre la distanza dall'origine al vincolo E_0.

Esercizio 2.

a. Dare la definizione di un dominio semplice nel piano. Enunciare il Teorema di riduzione di un integrale doppio ad integrali iterati per una funzione $f(x,y)$ definita su di un dominio semplice.

b. Calcolare l'integrale

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

dove D è il dominio limitato dalle curve $y - x = 2$ e $y = x^2 - 4$ e la funzione f è data da $f(x,y) = xe^y$.

c. Sia $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ è un campo vettoriale in D. Trovare condizioni sufficienti sul campo $\mathbf{F}$ affinchè il lavoro effettuato da $\mathbf{F}$ lungo il bordo di D (percorso in senso antiorario) sia uguale a $\int\int_D f\,dxdy$. Giustificare la risposta.

Esercizio 3 Sia f la funzione periodica di periodo 2π data da $f(x) = \pi^2 - x^2$ per $x \in [-\pi, \pi]$.

a. Scrivere la serie di Fourier $S(x)$ associata alla funzione f

b. Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della serie $S(x)$ ad f.

c. Mostrare la formula

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\pi^2/12.$$

Esercizio 4.

a. Risolvere il seguente problema di Cauchy per la funzione $y = y(t)$

$$\begin{cases} y' = 3y + t^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

b. Fare uno studio qualitativo delle soluzioni del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{ty}{1+(ty)^2} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (PC)$$

in dipendenza dal dato iniziale. **NON** sono richieste le soluzioni del problema (PC), ma si deve fare uno studio dell'esistenza ed unicità locale, intervalli massimali d'esistenza, eventuali simmetrie e soluzioni d'equilibrio, intervalli di crescita e convessità. Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni.

c. (FACOLTATIVO) Ci sono asintoti orizzontali/obliqui per le soluzioni del problema (PC)?

N.B. Sono concesse **TRE ORE E TRENTA MINUTI** per la risoluzione dei quattro esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.
Passati **5 minuti** dall'inizio della prova **NON** è consentito ritirarsi.
Se la prova scritta risultasse gravemente insufficiente verrà registrato l'esito negativo dell'esame.