PROVA SCRITTA DI ANALISI II – 17/02/2000

Allievi Ingegneri Aerospaziali

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1. Sia $f : D \subset \mathbf{R}^2$ la funzione data da

$$f(x,y) = xe^{x+y^2} \quad \text{dove} \quad D = [-2,2] \times [-1,1].$$

a. Scrivere la formula di Taylor di ordine 2 centrata in $(x_0, y_0) = (1,0)$ per f, col resto di Peano.

b. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $P = (1,0,f(1,0))$ e trovare i versori normali al grafico di f nel punto P.

c. Scrivere l'integrale che calcola l'area della superficie

$$\Sigma = \text{graf}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z = f(x,y), (x,y) \in D\}.$$

NON è richesto il calcolo di tale integrale.

Esercizio 2.

a. Enunciare il Teorema della divergenza nello spazio

b. Siano $\mathbf{F}$ il campo vettoriale dato da

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (z - 2y, 2x + z^2, x^2 + (z-2)^2)$$

e $\Omega \subset \mathbf{R^3}$ il dominio definito da

$$\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq y + 2\}.$$

Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ uscente dalla frontiera di Ω.

c. Calcolare il lavoro effettuato da $\mathbf{F}$ lungo il bordo di $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 3.

a. Enunciare un criterio sulla sviluppabilità di una funzione f in serie di Taylor. Trovare gli intervalli in cui $f(x) = e^x$ è sviluppabile in serie di Taylor.

b. Trovare la serie di MacLaurin (serie di Taylor centrata in $x_0 = 0$) di $g(x) = f(-2x^3) = e^{-2x^3}$ e studiare la convergenza puntuale ed uniforme di tale serie.

c. Calcolare, se esiste, l'integrale $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.

Esercizio 4.

a. Trovare la soluzione generale del seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = x + y + t^2 \\ y' = x - y, \end{cases}$$

b. Fare uno studio qualitativo delle soluzioni del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(ty)^2}{1 + (ty)^2} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (PC)$$

in dipendenza dal dato iniziale. **NON** sono richieste le soluzioni del problema (PC), ma si deve fare uno studio dell'esistenza ed unicità locale, intervalli massimali d'esistenza, eventuali simmetrie e soluzioni d'equilibrio, intervalli di crescita e convessità. Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni.

c. Ci sono asintoti orizzontali/obliqui?

N.B. Sono concesse **TRE ORE E TRENTA MINUTI** per la risoluzione dei quattro esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.
Passati **5 minuti** dall'inizio della prova **NON** è consentito ritirarsi.