PROVA SCRITTA DI ANALISI I – 11/2/1999

Allievi Ingegneri Aerospaziali

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

a. Enunciare il Teorema degli zeri.

b. Mostrare che esiste almeno una soluzione $x_1 \in \mathbf{R}$ dell'equazione

$$e^{|x|}\ln(|x+e^{-2}|)+1=0.$$

c. Data una funzione $f \in C^2(\mathbf{R})$ tale che

i) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$,

ii) esistono due punti $x_1 < x_2$ tali che $f(x_2) < 0 < f(x_1)$,

mostrare che esiste almeno un punto $\xi \in \mathbf{R}$ in cui $f''(\xi) = 0$.

Esercizio 2.

a. Enunciare il criterio dell'integrale per la convergenza di una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ con $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

b. Verificare che la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} ne^{-n}$ è convergente e mostrare che

$$\frac{3}{e^2} \le \sum_{n=2}^{+\infty} ne^{-n} \le \frac{2}{e}$$

c. Studiare le convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{1+n^3\ln(1+\frac{1}{n})}.$$

Esercizio 3.

a. Studiare la funzione

$$y = F(x) = \int_1^x \frac{t-2}{e^t-1}dt$$

e disegnarne il grafico qualitativo nel piano (x, y), includendo il dominio di esistenza di F, eventuali estremi locali, punti di flesso, e asintoti di F.

b. Data la funzione F definita nel punto precedente, determinare l'insieme massimale contenente $x_0 = 1$ tale che F ammetta funzione inversa $G(y) = F^{-1}(y)$ e calcolare, se esiste, $G'(y_0)$ nel punto y_0 tale che $G(y_0) = 1$.

Esercizio 4. Sia $z \in \mathbf{C}$ con $z = x + iy$, per $x, y \in \mathbf{R}$.

a. Dare le definizioni in forma algebrica di $|z|$ e $\frac{1}{z}$.

b. Trovare il valore massimo e il valore minimo della funzione a valori reali $f(z)$, sul segmento congiungente nel piano di Gauss i punti $z_1 = 1$ e $z_2 = i$, dove

$$f(z) = |1 - 3z|.$$

N.B. Sono concesse **3 ORE E 30 MINUTI** per la risoluzione dei quattro esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed esercizari. Passati **5 minuti** dall'inizio della prova **NON** è consentito ritirarsi. Se la prova scritta risultasse gravemente insufficiente verrà registrato l'esito negativo dell'esame.