PROVA SCRITTA DI ANALISI I – 7/9/1999

Allievi Ingegneri Aerospaziali

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

a. Enunciare il Teorema di Rolle.

b. Data la funzione $f : [-1,3] \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 3x+4 & x \in [-1,1], \\ -3x^2+9x+1 & x \in (1,3], \end{cases}$$

verificare che f soddisfi le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[-1,3]$ e trovare un punto che soddisfi la tesi di tale Teorema.

c. Sia g derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$ tali che $g(0) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$. Mostrare che esiste $c \in (0,\infty)$ tale che $(g)'(c) = 0$.

Esercizio 2.

a. Data una funzione $f \in C^0([a,b])$, enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo integrale.

b. Studiare la funzione

$$y = F(x) = \int_1^x \frac{1}{t\sqrt{4-t^2}}dt$$

e disegnarne il grafico qualitativo nel piano (x,y), includendo il dominio di esistenza di F, eventuali estremi locali, punti di flesso, e asintoti di F.

c. Per la funzione F definita nel punto precedente, scrivere la formula di Taylor di ordine 2 centrata nel punto $x = 1$ con il resto di Peano.

Esercizio 3.

a. Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ dove $\{a_n\}$ è la successione tale che $a_1 = 2$, $a_2 = -1$ e

$$\sum_{n=3}^{N} a_n = (1+3/N)^{2N} \quad \forall N \geq 3,$$

dire se tale serie converge e nel caso affermativo calcolarne la somma.

b. Studiare la convergenza delle seguenti serie (giustificando le risposte con gli enunciati dei criteri di convergenza usati):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{n^2+1} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n n!}.$$

Esercizio 4.

a. Per una funzione $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ dare una condizione sufficiente affinchè f sia integrabile secondo Riemann nell'intevallo $[a,b]$ e dare un esempio di una funzione $f : [2,3] \to \mathbf{R}$ che NON sia integrabile secondo Riemann.

b. Calcolare

$$I = \int_0^2 \left(xe^x + \sin^3 x \cos x\right) dx$$

N.B. Sono concesse **TRE ORE E TRENTA MINUTI** per la risoluzione dei quattro esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed esercizari.
Passati **5 minuti** dall'inizio della prova **NON** è consentito ritirarsi.
Se la prova scritta risultasse gravemente insufficiente verrà registrato l'esito negativo dell'esame.