Esercizi di Analisi Matematica I – N. 13

Allievi del C.L/C.D in Informatica - Dott. Kevin R. Payne

Esercizio 1. Sia $f : (-1, +\infty) \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = (x+1)^3 - 32(x+1)^{-2}$. Dire se f è invertibile sul suo dominio e calcolare $(f^{-1})'(0)$ se esiste.

Soluzione: Analizzando il segno della derivata di f

$$f'(x) = \frac{3(x+1)^5 + 64}{(x+1)^3} \quad \text{per} \quad x > -1$$

si trova che f è strettamente crescente su $(-1, +\infty)$ e quindi invertibile sul suo dominio. Si calcola $(f^{-1})'(0) = 1/f'(f^{-1}(0))$ (se f è derivabile in $x_0 = f^{-1}(0)$ e $f'(x_0) \neq 0$). Qui x_0 è l'unica soluzione dell'equazione $f(x_0) = 0$; cioè si deve risolvere per x_0 in $(x+1)^3 - 32/(x+1)^2 = 0$. Segue che $x_0 = 1$ e $(f^{-1})'(0) = 1/20$.

Esercizio 2. Sia $f : [0, 8] :\to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{8-x}$. Dire se f è invertibile sul suo dominio e calcolare $(f^{-1})'(0)$ se esiste.

Soluzione: Analizzando il segno della derivata di f

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{8-x}}\right] \quad \text{per} \quad 0 < x < 8$$

si trova che f è strettamente crescente su $(0, 8)$. Usando la continuità di f in $[0, 8]$ si conclude che f è strettamente crescente su $[0, 8]$ e quindi invertibile sul suo dominio. Si calcola $(f^{-1})'(0)$ come nel esercizio 1; questa volta $x_0 = 4$ e $(f^{-1})'(0) = 2$.

Esercizio 3. Trovare i valori di $k \in \mathbf{R}$ tali che l'equazione $x^4 + 4x^3 = k$ ha almeno una soluzione reale.

Soluzione: La risposta è $k \geq -27$. Scrivendo l'equazione nella forma $f_k(x) = x^4 + 4x^3 - k = 0$ si vede che f_k tende a $+\infty$ per $|x| \to +\infty$. Quindi abbiamo bisogno di un valore negativo per applicare il Teorema degli zeri (f è derivabile e quindi continua su tutto $\mathbf{R}$). Calcolando la derivata di f_k si trova un minimo locale (globale!) in $x = -3$. Il valore $f_k(-3) = -27 - k$ e quindi vogliamo $-27 - k \geq 0$. **N.B.** Si può anche disegnare il grafico di f_0 e vedere il grafico di f_k come una traslazione in y di quello di f_0.

Esercizio 4. Siano f e g le funzioni definite da

$$f(x) = e^{3x} - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = ax - 2x^2.$$

Trovare i valori di $a \in \mathbf{R}$ tali che esiste una soluzione negativa dell'equazione $f(x) = g(x)$.

Soluzione: La risposta è $a < 3$. Si disegna il grafico di f facilmente dove $f(0) = 0$ e f è strettamente crescente. Il grafico di g dipende sul valore di a ma sempre si ha $g(0) = g(a/2) = 0$

e $\lim_{|x|\to+\infty} g(x) = -\infty$. È chiaro che c'è sempre una soluzione neagtiva se $a \leq 0$. Per $a > 0$ si vede che il "caso critico" è quando i grafici di f e g sono tangenti in $x = 0$; cioè quando $f(0) = g(0)$ e $f'(0) = g'(0)$. Risolvendo questa sistema si trova $a = 3$. Per ogni $a < 3$ la pendenza in $x = 0$ di g è mendo di quella di f è quindi ci sarà una soluzione negativa dell'equazione data.

Esercizio 5. Sia $f(x) = \sqrt{|x-1|} - x/2$. Trovare (se esistono) $\max_{[0,3]} f$ e $\min_{[0,3]} f$.

Soluzione: Si nota che f è continua su $[0,3]$ compatto e quindi f ammette massimo e minimo in $[0,3]$ per il Teorema di Weierstrass. Usando il Teorema di Fermat si sa che ci sono solo 3 possibilità per i luoghi dei estremi assoluti: **i)** gli estremi $x = 0, 3$; **ii)** i punti stazionari $x_0 \in (0,3)$ tali che $f'(x_0) = 0$; **iii)** i punti irregolari $x_0 \in (0,3)$ tali che $f'(x_0)$ non esiste. Qui si trova un punto stazionario in $x = 2$ e un punto irregolare in $x = 1$. Calcolando i valori di f in questi punti $x = 0, 3, 2, 1$ si trova la risposta

$$\max_{[0.3]} f = 1 = f(0) \quad \text{e} \quad \min_{[0,3]} f = -1/2 = f(1).$$

Esercizio 6. Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & -1 \leq x \leq 0 \\ x^x - 1 & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

Trovare (se esistono) $\max_{[-1,2]} f$ e $\min_{[-1,2]} f$.

Soluzione: Ricordiamo che $x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1$ da cui segue che f è continua in $[-1,2]$ (basta controllare la continuità in $x = 0$ dove abbiamo incollato due regole diverse). L'intervallo $[-1,2]$ è compatto e quindi si può applicare il Teorema di Weierstrass. Seguendo l'approccio di Esercizio 5, basta calcolare il valore di f negli estremi $x = -1, 2$ nel punto stazionario $x = 1/e$ e nel punto irregolare $x = 0$. Si trova la risposta

$$\max_{[-1.2]} f = 3 = f(2) \quad \text{e} \quad \min_{[-1,2]} f = (1/e)^{1/e} - 1 = f(1/e).$$

Esercizio 7. Trovare i valori di $a, b \in \mathbf{R}$ per cui la funzione $f_{a,b}$ sia derivabile sul suo dominio

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} e^{bx+a^2} & x \leq 0 \\ x + b(1 + \sin x) & x > 0 \end{cases}$$

Soluzione: La risposta è $b = (1+\sqrt{5})/2$ e $a = \pm\sqrt{\ln(b)}$. È chiaro che $f_{a,b}$ è continua e derivabile fuori dall'origine per ogni a, b. La funzione è continua in $x = 0$ quando $e^{a^2} = b$ (calcolando il limite destro/ sinistro per $x \to 0$). Inoltre si ha

$$f'_{a,b}(x) = \begin{cases} be^{bx+a^2} & x < 0 \\ 1 + b\cos x & x > 0 \end{cases}$$

da cui segue la condizione necessaria $1+b=be^{a^2}$ per la derivabilità in $x=0$. Risolvendo queste 2 equazioni si ottiene il risultato dove si nota che la prima implica $b>0$.

Esercizio 8. Dire se la funzione definita da

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{(1-\cos x)/|x|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

è derivabile nell'origine.

Soluzione: La risposta è no, la funzione non è derivabile in $x=0$. D'altre parte f è continua in $x=0$. Si vede che f è pari essendo $\cos x$ e $|x|$ pari. Quindi nel calcolo di $\lim_{x\to 0} f(x)$ basta calcolare per $x\to 0^+$. Usando lo sviluppo $\cos(x)=1-x^2/2+o(x^2)$ per $x\to 0$ si ottiene la continuità in $x=0$. Per la derivabilità basta calcolare

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\sqrt{\frac{1-\cos(h)}{h^3}}=+\infty$$