Esercizi di Analisi Matematica I – N. 2

Allievi del C.L/C.D in Informatica - Dott. Kevin R. Payne

Esercizio 1. Risolvere $\sqrt[3]{8x^3-7} < 2x-1$

Soluzione: $x \in (-1/2, 1)$

Esercizio 2. Risolvere $\sqrt{2x+1} > x-3$

Soluzione: $x \in [-1/2, 4+2\sqrt{2})$

Esercizio 3. Risolvere $2^{x^2} \leq 3^x$

Soluzione: $x \in [0, \ln 3/\ln 2]$

Esercizio 4. Risolvere $\dfrac{1}{\ln(x)-1} - \dfrac{2}{\ln(x)} \geq 1$. **Suggerimento:** Si mette $y = \ln(x)$.

Soluzione: $x \in [e^{-\sqrt{2}}, 1) \cup (e, e^{\sqrt{2}}]$

Esercizio 5. Siano $f(x) = e^x - 1$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - 1/x}$. Trovare $f \circ g$ e $g \circ f$ specificando i loro domini.

Soluzione: $(f \circ g)(x) = e^{\sqrt{x^2-1/x}} - 1$ col dominio $x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$
e $(g \circ f)(x) = \sqrt{(e^x-1)^2 - 1/(e^x-1)}$ col dominio $x \in (-\infty, 0) \cup [\ln 2, +\infty)$.

Esercizio 6. Scomporre le seguente funzioni (scrivere come composizioni di funzioni elementari) specifcando i loro domini: $f(x) = \ln(\ln(x+2))$ e $g(x) = \sqrt{1/(e^{|x|^2}-3)}$.

Soluzione: Si trova f come la composizione di 3 funzioni così:

$$x \overset{(\cdot)+2}{\mapsto} x+2 \overset{\ln(\cdot)}{\mapsto} \ln(x+2) \overset{\ln(\cdot)}{\mapsto} \ln(\ln(x+2))$$

da cui segue dom(f) $= (-1, +\infty)$. g è la compositione di 6 funzioni elementari così:

$$x \overset{|\cdot|}{\mapsto} |x| \overset{(\cdot)^2}{\mapsto} |x|^2 \overset{e^{(\cdot)}}{\mapsto} e^{|x|^2} \overset{(\cdot)-3}{\mapsto} e^{|x|^2} - 3 \overset{1/(\cdot)}{\mapsto} 1/(e^{|x|^2}-3) \overset{\sqrt{(\cdot)}}{\mapsto} \sqrt{1/(e^{|x|^2}-3)}$$

da cui segue dom(g) $= (-\infty, -\sqrt{\ln 3}) \cup (\sqrt{\ln 3}, +\infty)$

Esercizio 7. Tracciare un grafico qualitativo delle sequente funzioni $f(x) = e^{x-1} + 2$, $g(x) = |e^{-x} - 3|$ e $h(x) = e^{-|x|} + 2$.

Soluzione: Tutte hanno dominio $\mathbf{R}$. A partire dal grafico di $F(x) = e^x$, per trovare il grafico di f si sposta il grafico di F "1 a destra e 2 in su". Per g si riflette F intorno l'asse y si sposta "3 in giù" e si applica il modulo. Per h si usa la definizone di $|x|$.

Esercizio 8. Trovare $\mathrm{dom}(f), \mathrm{dom}(f^{-1})$ e $f^{-1}(x)$ per le seguente funzioni:

$$\textbf{a)}\ \ f(x) = \frac{3-x}{x+2} \quad \textbf{b)}\ \ f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+6}}$$

Suggerimento: Si può scrivere una funzione razionale della forme $(ax+b)/(cx+d)$ come $a/c + k/(cx+b)$ per k opportuno. Dopodichè si cerca il grafico qualitativo delle funzioni sopra.

Soluzione: Per **a)**: $\mathrm{dom}(f) = (-\infty,-2) \cup (-2,+\infty)$, $\mathrm{dom}(f^{-1}) = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$ e $f^{-1}(x) = -2 + 5/(x+1)$. Per **b)**: $\mathrm{dom}(f) = [1,+\infty)$, $\mathrm{dom}(f^{-1}) = [0,1)$ e $f^{-1}(x) = -6 + 7/(1-y^2)$.