Istituzioni di Matematiche - INFORMATICA

Esempi di esercizi - Secondo compitino -

1) Sia $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{per } 0 \le x \le 1 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{per } x < 0 \vee x > 1 \end{cases}$.
Stabilire per quali valori dei parametri reali a, b, c, d la funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

2) Sia $f(x) = \sqrt[3]{x \cdot \sin(3x^2)}$. Stabilire se f è derivabile in $x = 0$ e in caso affermativo calcolare $f'(0)$.

3) Sia $f(x) = x^5 \cdot \exp(x^3)$. Calcolare la derivata di ordine 17 di f in $x = 0$.

4) Sia $f(x) = \dfrac{1}{\cos(2x)}$. Scrivere il polinomio di MacLaurin di quarto grado di f.

4*bis*) Sia $f(x) = \dfrac{1}{\cos(2x)}$. Scrivere la formula di Taylor con il resto secondo Peano arrestata al quarto ordine di f.

4) Trovare esplicitamente tutti i valori intermedi x_0 del Teorema di Lagrange relativo alla funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$, nell'intervallo $[0, 1]$.

4*bis*) lo stesso, ma in $[0, 2]$.

5) Sia $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Stabilire quante sono le soluzioni (reali) dell'equazione $f'(x) = 0$.

5*bis*) Sia $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.
Stabilire se f presenta simmetrie rispetto a qualche punto, quindi utilizzando una opprtuna sostituzione trovare tutte le soluzioni (reali) dell'equazione $f'(x) = 0$.

6) Stabilire se la funzione $f(x) = (x-1)^3 \cdot (x+3)^3$ presenta simmetrie rispetto a qualche punto, quindi utilizzando una opprtuna sostituzione trovare tutti i punti di massimo, di minimo e di flesso.

7) Determinare tutti i punti di massimo, di minimo e di flesso della funzione $f(x) = (x-1)^5 \cdot x$.

8) Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x) = |x|^3 + |x-2|^3$ nell'intervallo $[0, 4]$

9) Determinare massimi e minimi assoluti della funzione $f(x) = e^{\sqrt{3x - x^3}}$ nell'intervallo $\left[0, \sqrt{2}\right]$

10) Studiare il segno della funzione $f(x) = \ln x - \dfrac{x-1}{x}$

11) Studiare il segno della funzione $f(x) = 2x \ln x + 1 - x^2$

12) Stabilire quante soluzioni ha l'equazione $\quad x^2 + x + 1 - e^x = 0$

13) Tra tutti i rettangoli con una base sull'asse delle ascisse e gli altri due vertici sulla parabola di equazione $\quad y = 1 - x^2 \quad (-1 \le x \le 1) \quad$ determinare quello di area massima.

$13bis$) Tra tutti i rettangoli con una base sull'asse delle ascisse e gli altri due vertici sulla parabola di equazione $\quad y = 1 - x^2 \quad (-1 \le x \le 1) \quad$ determinare quello di perimetro massimo.

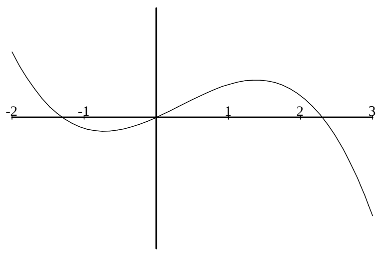
14) Stabilire se la funzione $\quad f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 4x^3} \quad$ ammette asintoti obliqui e, in caso affermativo, scriverne le equazioni.

15) Sia $\quad f(x) = 2x + e^{3x}$. Stabilire se f è invertibile e, in caso affermativo, calcolare $(f^{-1})'(1)$.

16) Sia $\quad F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\, dt$. $\quad$ Calcolare (per $x \neq 0$) $F'(x)$.

17) Sia $\quad F(x) = \displaystyle\int_1^{x^3} \cos \sqrt[3]{t}\, dt$. $\quad$ Calcolare $\ F'(x)$.

18) Disegnare il grafico di $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ dove f ha il grafico riportato in figura



19) Data la serie (telescopica) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k(k+3)}$, calcolare la somma parziale $n-$esima e, di conseguenza, la somma della serie.

20) Stabilire per quali valori del parametro reale α la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2\alpha+1}\right)^k \cdot \frac{1}{k}$ converge assolutamente e per quali valori converge semplicemente.

21) Stabilire per quali valori del parametro reale α la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ converge

22) Calcolare una primitiva della funzione $\quad f(x) = \sin(\ln x) \quad$ (integrare per parti)

$22bis$) Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \sin(\ln x)$ (sostituzione $x = e^t$)

23) Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{(3^x - 2^x)^2}{2^x \cdot 3^x}$

17) Stabilire se l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ converge, e in caso affermativo calcolarlo.

24) Stabilire se l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{4x^2+x}}$ converge, e in caso affermativo calcolarlo.

(sostituzione: $\sqrt{4x^2+x} = xt$)

25) Stabilire se l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \ln(1+\sqrt[3]{x})}$ converge.

26) Stabilire se l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x \cdot \sqrt[3]{x}}\, dx$ converge.

27) Stabilire se l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x \cdot \sqrt[3]{x}}\, dx$ converge.

22) Stabilire se l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2^{-x^2}\, dx$ converge.

28) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $y' + \dfrac{xy}{x^2+1} = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ che verifica la condizione iniziale $y(0) = 1$.

29) Trovare tutte le soluzioni (in forma implicita) dell'equazione differenziale
$x(1+y^2)\, y' = 3$

30) Trovare tutte le soluzioni (in forma implicita) dell'equazione differenziale
$(x^2 - yx^2)\, y' + y^2 + xy^2 = 0.$