COGNOME..... NOME..... N. matricola.....

C.L. in Fisica, **ANALISI MATEMATICA 1** (proff. L. Rondi, K. Payne)
13 settembre 2019

Riportare uno svolgimento esauriente per ogni esercizio, esclusi gli esercizi 1 e 2.

1. (*4 punti*) In $\mathbb{R}$ dotato della metrica euclidea siano

$$E_n = \left\{ x \in \mathbb{Q} : \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \leq |x| < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \right\}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

Detti $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n, F = \bigcap_{n\geq 1} E_n$, allora:

$E =$ ..... $F =$ .....

$E^\circ =$ ..... $F^\circ =$ .....

$E' =$ ..... $F' =$ .....

$\partial E =$ ..... $\partial F =$ .....

---

2. (*4 punti*) Determinare, se esistono, $\max E, \min E, \sup E$ e $\inf E$ per l'insieme

$$E := \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n} + \frac{1}{k}, \quad n, k \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ k \geq 1 \right\}$$

$\inf E =$ ..... $\sup E =$ .....

$\min E =$ ..... $\max E =$ .....

3. (*8 punti*) Tracciare un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} + 3x$$

Sono richiesti: il dominio, il segno, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti, gli eventuali punti di non derivabilità e la loro natura, lo studio della monotonia e gli estremi locali. Non è richiesto lo studio della convessità.

4. *(4 + 2 punti)*

(a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 3$ e sia $g(x) = f(x) - e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Stabilire il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g(n^{-\alpha})$, al variare del parametro reale $\alpha > 0$. Se convergente, stabilire se la convergenza è assoluta o meno.

(b) Stabilire il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)\frac{2n-7}{2n^2-3}$, precisando, nel caso converga, se la convergenza è assoluta o meno.

5. (*4 punti*) Sia $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, derivabile in $(2, +\infty)$ con

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(2).$$

Mostrare che esiste $c \in (2, +\infty)$ tale che $f'(c) = 0$.

---

6. (*4 punti*) Sia la funzione $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2 \arctan \dfrac{1}{x} - a \arcsin \left(\dfrac{x - x^3}{|x|} \right) & x \in (-1, 1) \backslash \{0\} \\ \\ b & x = 0 \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione f è continua su $(-1, 1)$. Per tali valori f è anche derivabile?