

COGNOME..... NOME..... N. matricola.....

C.L. in Fisica, ANALISI MATEMATICA 1 (proff. K. Payne, C. Zanco)
20 febbraio 2018 - versione B

Prova scritta d'esame (durata 2h 30')

1. (4 punti) Tracciare un grafico qualitativo della funzione $f(x) = \sqrt{2 + |x| - |2 - x|}$ dal quale risultino evidenti eventuali punti di non derivabilità e verso della concavità.

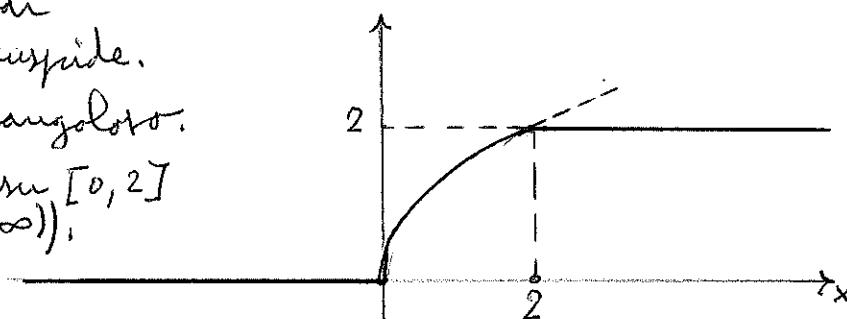
(Riportare il grafico senza giustificazioni.)

$$\text{Si ha } 2 + |x| - |2 - x| = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2x & 0 < x < 2 \\ 4 & x \geq 2 \end{cases}.$$

$x=0$ punto di semi-cuspide.

$x=2$ punto angoloso.

f concava su $[0, 2]$ ($\in [0, +\infty)$),



2. (6 punti) Stabilire per quali valori del parametro reale α la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^\alpha}{\sqrt[4]{4 \log(n)}}$ converge, precisando se la convergenza sia assoluta.

(Riportare uno svolgimento completo.)

La serie proposta coincide con la serie $-\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^\alpha}{\sqrt[4]{4 \log n}}$.

Sia $a_n^{(\alpha)} = \frac{n^\alpha}{\sqrt[4]{4 \log n}}$. Si ha $a_n^{(\alpha)} > 0$ per ogni n . Se $\alpha > 0$,

$a_n^{(\alpha)} \rightarrow \infty$, dunque la serie non può convergere. Se e solo se $\alpha < -1$ la serie converge assolutamente. Se $-1 \leq \alpha \leq 0$,

$a_n^{(\alpha)} \rightarrow 0$ ed è prodotto del fattore $\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$, crescente, e del fattore $\frac{n^\alpha}{\log n}$, decrescente. Posto $f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{4^{\alpha/4} \log x}$, per $x \rightarrow +\infty$

si ha $\operatorname{sgn} f'_\alpha(x) = \operatorname{sgn} \left\{ \alpha x^{\alpha-1} 4^{\alpha/4} \log x + x^{\alpha-2} 4^{\alpha/4} \log^2 x - x^{\alpha-1} \right\} =$

$= \operatorname{sgn} (\alpha x^{\alpha-1} \log x) = -1$ se $-1 \leq \alpha < 0$, $= \operatorname{sgn} \left(-\frac{1}{x} \right) = -1$ se $\alpha = 0$.

Allora $\{a_n^{(\alpha)}\}$ è decrescente e la serie converge per il criterio di Leibniz.

3. (5 punti) Calcolare $\lambda = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{\sin(\pi(x+x^2))}{\sqrt{|\log(\cos(2\pi x))|}}$. $\lambda = \dots - \frac{1}{\sqrt{2}}$

(Riportare una traccia sintetica dello svolgimento.)

Porto $x-5=t$, si ha $x \rightarrow 5^- \Leftrightarrow t \rightarrow 0^-$. Si ha allora

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\pi(t+5+t^2+10t+25))}{(1 \cdot \log(1 + \cos(2\pi t + 10\pi) - 1))^{1/2}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sin(11\pi t + 30\pi)}{|\cos(2\pi t + 10\pi) - 1|^{1/2}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{11\pi t}{\sqrt{2\pi^2 t^2}} = -\frac{11}{\sqrt{2}}.$$

4. (5 punti) Stabilire se la successione $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ così definita per ricorrenza

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{4x_n}{5} + \frac{20}{x_n} \\ x_0 = 15 \end{cases}$$

ammette limite e in caso affermativo determinarlo.

(Riportare uno svolgimento completo.).

Chiaramente $x_n > 0$ per ogni n .

Se $\lim x_n = \lambda \in [0, +\infty]$ esiste, poiché $\lambda = \lim x_{n+1}$, deve soddisfare l'uguaglianza $\frac{4}{5}\lambda^2 + 20 = \lambda^2$, dunque può essere solo $\lambda = 10$ o $\lambda = +\infty$.

Lo stesso calcolo fornisce $x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow x_n \leq 10$.

Averdoti $x_0 = 15 > 10$ e $x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{20}{x_n} > 10$ se

$x_n > 10$, per induzione su n si ottiene che $\{x_n\}$ è decrescente, dunque regolare e limitata. Ne segue $\lambda = 10$.

5. (5 punti) Stabilire per quali i valori del parametro reale α la funzione $f_\alpha(x) = x^2\sqrt{\alpha-x}$ presenta un punto estremante locale in $x = 2$, precisandone la natura. (Riportare i risultati senza giustificazione.)

$d=2$ minimo assoluto (forte), $\alpha=\frac{5}{2}$ massimo relativo (forte).
(v. soluzione alla pag. successiva).

6. (6 punti) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione iniettiva e suriettiva, continua quando \mathbb{R} è dotato della metrica euclidea. Mostrare che lo spazio metrico (\mathbb{R}, d) dove d è la metrica definita da

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

è completo. Per \mathbb{R} dotato della metrica euclidea e per (\mathbb{R}, d) , gli insiemi aperti sono gli stessi? E gli insiemi limitati? È vero che un sottinsieme di \mathbb{R} è un disco nella metrica euclidea se e solo se è un disco nella metrica d , eventualmente con centri diversi?

(Giustificare adeguatamente ogni risposta fornita.)

Per definizione di d , una successione $\{x_n\}$ è di Cauchy in (\mathbb{R}, d) se e solo se $\{f(x_n)\}$ è di Cauchy in (\mathbb{R}, e) (euclideo) (in seguito), dunque convergente a un valore p in (\mathbb{R}, e) . Poiché f è iniettiva e suriettiva, esiste uno e un solo $x \in \mathbb{R}$ tale che $p = f(x)$. È chiaro che $\{x_n\}$ converge a x in (\mathbb{R}, d) per definizione di d .

Per un noto teorema anche f^{-1} è continua (iniettiva e suriettiva) da (\mathbb{R}, e) su sè (in particolare, $t_n \rightarrow \infty$ se e solo se $f(t_n) \rightarrow \infty$).

Allora:

a) $\{x_n\}$ converge a x in (\mathbb{R}, e) se e solo se converge a x in (\mathbb{R}, d) , quindi gli aperti nelle due metriche sono gli stessi (perché?).

b) un insieme S è limitato in (\mathbb{R}, e) se e solo se $f(S)$ è limitato in (\mathbb{R}, e) , dunque se e solo se è limitato in (\mathbb{R}, d) .

Un disco (aperto) in (\mathbb{R}, e) è un intervallo (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$ e il suo centro è $\frac{a+b}{2}$, e viceversa, f e f^{-1} trasformano intervalli in intervalli: allora anche i dischi in (\mathbb{R}, d) sono tutti e soli gli intervalli; in (\mathbb{R}, d) il disco (a, b) ha come centro $f^{-1}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$. Questo conferma la coincidenza delle topologie.

7. (5 punti) Determinare la derivata quarta nel punto zero della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x-1}}{4+x^2}. \quad (\text{Riportare uno svolgimento completo.})$$

f è infinite volte derivabile in 0. $f^{(4)}(0)$ è il coefficiente del termine di 4° grado in x dello sviluppo di McLaurin di f moltiplicato per $4!$. Per $x \rightarrow 0$ si ha

$$(1-3x)^{1/3} = 1 - \frac{1}{3}(3x) + \binom{1/3}{2} 9x^2 - \binom{1/3}{3} 27x^3 + \binom{1/3}{4} 81x^4 + o(x^4)$$

(sviluppo binomiale) e

$$\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} + o(x^4) \quad (\text{sviluppo geometrico}),$$

Allora il termine che interessa è quello di grado 4 nel prodotto

$$-\frac{1}{4} \left(1 + \binom{1/3}{2} 9x^2 + \binom{1/3}{4} 81x^4 \right) \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} \right). \quad \text{Poiché } \binom{1/3}{2} = -\frac{1}{9}$$

e $\binom{1/3}{4} = -\frac{10}{3^5}$ il prodotto diventa $-\frac{1}{4} \left(1 - x^2 - \frac{10}{3} x^4 \right) \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} \right)$

$$\text{e dunque } f^{(4)}(0) = -\frac{1}{4} \cdot 4! \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{10}{3} \right) = \frac{145}{8}.$$

5. Perché f_α sia definita nel punto 2 deve essere $\alpha \geq 2$.

Si ha $f_2(2) = 0$: essendo f_α un'funziona negativa, $x=2$ è punto di minimo assoluto (foste) se $\alpha = 2$.

Per $\alpha > 2$, $x=2$ è internal dominio e f_α è derivabile

in $x=2$. Dunque perché $x=2$ sia estremante deve essere

$$f'_\alpha(2) = 0. \quad \text{Da } f'_\alpha(x) = 2\sqrt{\alpha-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{\alpha-x}} \quad \text{si ottiene che}$$

$$f'_\alpha(2) = 0 \iff 8(\alpha-2) = 4 \iff \alpha = \frac{5}{2}.$$

Poiché $f(0) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$, il teorema di Weierstrass

indica che $x=2$ è punto di massimo (relativo, forte).