Soluzione della Prova Scritta di Analisi Matematica 2-I

(C.d.L. in Matematica)

Scritto di 19 giugno 2002

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1.

1i. Vogliamo verificare che $\Phi(x, y) = xy^2 + y + \sin(xy) + 3(e^x - 1) = 0$ definisce localmente un'unica funzione implicita $y = g(x)$ vicino il punto $(0, 0)$. Basta controllare l'ipotesi del Teorema di Dini in questo caso. $\Phi \in C^\infty \mathbf{R}^2$ e quindi è regolare quanto vogliamo (basta continua con Φ_y continua in un intorno di $(0, 0)$). Si calcola

$$\Phi_y = 2xy + 1 + x\cos(xy)$$

e quindi $\Phi_y(0, 0) = 1 \neq 0$. Per il Teorema di Dini esiste un'unica funzione implicita $g : B_\delta(0) \to B_\rho(0)$ tale che $0 = g(0)$ e $\Phi(x, g(x)) = 0$ per ogni $(x) \in B_\delta(0)$. Essendo Φ di classe C^∞ si sa che la funzione implicita $g \in C^\infty(B_\delta(0))$.

1ii. Vogliamo calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + 5x^2}{x^2}$$

dove g è la funzione implicita definita in parte **1i.**. Il limite ha forma di indecisione $0/0$ essendo g continua con $g(0) = 0$. Si nota che il denominatore ed il secondo termine del numeratore sono infinitesimi di ordine 2. Il termine g è infinitesima di ordine 1 come si vede facendo uno sviluppo di Taylor:

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + o(x) = -3x + o(x) \quad \text{per} \quad x \to 0.$$

Infatti sappiamo già che $g(0) = 0$ e derivando l'equazione

$$0 = \Phi(x, g(x)) = xg^2 + g + \sin(xg) + 3(e^x - 1) \tag{1}$$

rispetto ad $x \in B_\delta(0)$ si trova

$$0 = g^2 + 2xgg' + \cos(xg)[g + xg'] + 3e^x \tag{2}$$

Valutando (2) in $x = 0, g = 0$ si trova $g'(0) = -3$. Quindi abbiamo

$$\frac{g(x) + 5x^2}{x^2} = \frac{-3x + o(x) + 5x^2}{x^2} = \frac{-3 + o(1)}{x} \quad \text{per} \quad x \to 0$$

e quindi il limite non esiste; più precisamente

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{g(x) + 5x^2}{x^2} = \mp\infty.$$

Esercizio 2.

2i Vogliamo risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{PC}$$

dove

$$a(x) = 4, \quad b(x) = x^2, \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 1.$$

L'equazione differenziale in (PC) è lineare e quindi sappiamo che la soluzione è rappresentabile tramite la formula

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\, dt$$

dove

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$$

è la primitiva della coefficiente $a(x)$ che si annula in x_0. Si ricorda che il primo termine della formula è la soluzione del problema omogeneo (dove $b = 0$) che tiene il valor iniziale di y_0 in x_0 e che il secondo termine è una soluzione del problema nonomogeneo (con la b) che si annulla in x_0. Nel nostro esempio troviamo

$$A(x) = \int_{2}^{x} 4\, dt = 4(x-2)$$

e poi

$$\int_{2}^{x} e^{-A(t)} b(t)\, dt = \int_{2}^{x} e^{-4(t-2)} t^2\, dt = \frac{41}{32} - e^{-4(x-2)} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \right),$$

usando integrazione per parti due volte. Quindi la soluzione è

$$y(x) = e^{4(x-2)} + e^{4(x-2)} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} + \frac{1}{32} \right)$$

oppure in ina forma più compatta

$$y(x) = \frac{73}{32}e^{4(x-2)} - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\right).$$

---

ii Vogliamo studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (PC)$$

dove

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+(xy)^2}, \quad x_0, y_0 \in \mathbf{R}.$$

A. Esistenza/unicità locale: Ricordiamo che il problema di Cauchy (PC) con condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ ammette un'unica soluzione locale $y(x; x_0, y_0)$ definita in qualche intorno $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ di x_0 se valgono le due condizioni: **i)** $f \in C^0(D)$ dove $D \subset \mathbf{R}^2$ è un aperto tale che $(x_0, y_0) \in D$, **ii)** f è localmente lipschitziana in y uniformemente in x; cioè esistono un intorno D_0 di (x_0, y_0) ed una costante L_0 tali che

$$|f(x,y) - f(x,z)| \le L_0|y - z|, \quad \forall (x,y), (x,z) \in D_0.$$

Nel nostro esempio $f \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ e quindi queste due condizioni sono soddisfate in un intorno di qualsiasi punto $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Quindi il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione $y(x; 0, y_0)$ per ogni scelta del valor iniziale y_0 di $y(x)$. Inoltre questa soluzione sarà di classe $C^\infty(I_\delta)$.

B. Soluzioni massimali e soluzioni di equilibrio: Si nota che la scelta $y_0 = 0$ dà una soluzione di equilibrio $y(x) \equiv 0, x \in \mathbf{R}$ e quindi ci sono delle soluzioni definite per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Inoltre, ricordiamo il risultato: *Sia $f(x,y) \in C^0([x_1, x_2] \times \mathbf{R})$ tale che esitono due costanti k_1, k_2 per cui*

$$|f(x,y)| \le k_1 + k_2|y|, \quad \forall (x,y) \in [x_1, x_2] \times \mathbf{R}.$$

Sia $x_0 \in (x_1, x_2)$. Allora l'unica soluzione $y(x; x_0, y_0)$ è definita in tutto l'intervallo $[x_1, x_2]$.

Nel nostro esempio $f \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ ed è limitato. Infatti

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy}{1+(xy)^2}\right| \le \frac{1}{2}, \quad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Quindi ogni soluzione locale $y(x; x_0, y_0)$ può essere prolungata a tutto la retta reale.

c. Simmetrie: Si nota che $f(x,y)$ è dispari in x, y. Se $y(x)$ è una soluzione in $(-\infty,\infty)$ di (PC) allora $w(x)=y(-x)$ soddisfa

$$w'(x) = -y'(-x) = -\left[\frac{-xy(-x)}{1+(-x)^2y^2(-x)}\right] = \frac{xw(x)}{1+(xw(x))^2}$$

e quindi w e y sono due soluzioni della nostra equazione differenziale. Inoltre $w(0)=y(0)$ e quindi per l'esistenza/unicità locale $y(x)=w(x)=y(-x)$ per ogni $x \in R$ e quindi y deve essere pari. In un modo analogo si verifica che $z(x)=-y(x)$ è anche una soluzione dell'equazione differenziale con $z(0)=-y(0)$. Quindi basta analizzare il caso del valor iniziale $y_0>0$ per esempio.

D. Monotonia/estremi: Il segno di $y'(x)$ in ogni punto è il segno della funzione $f(x,y)$ che è il segno di xy. Ci sono 4 zone determinati dalle rette $y=0$ e $x=0$. Si trova: **Caso 1)** ogni soluzioni con $0<y_0$ ha un minimo globale in $x=0$, è strettamente decrescente in $(-\infty,0]$, è strettamente crescente in $[0,+\infty)$; **Caso 2)** ogni soluzione con $y_0<0$ ha massimo globale in $x=0$, è strettamente crescente in $(-\infty,0]$, è strettamente decrescente in $[0,+\infty)$. **N.B.** La soluzione costante corresponde all'unica altre possibilità $y_0=0$.

E. Convessità: Come già notato le soluzioni sono di classe C^∞ sul loro dominio di esistenza (tutto $\mathbf{R}$). Derivando implicitamente l'equazione $y'=f(x,y)$ si trova

$$y''(x) = \frac{y[1-(xy)^2]}{D^2}\left(\frac{x^2}{D}+1\right)$$

dove abbiamo posto $D=1+(xy)^2$. Quindi il segno di y'' è quello di $g(x,y)=y[1-(xy)^2]$. Il segno di g cambia in $y=0$ e dove $xy=\pm 1$ (due iperboli). Si trova che le soluzioni sono convesse per $[y>0]\wedge[y<1/x \vee x=0]$ oppure per $[y<0]\wedge[y<1/x]$. Le curve $y=\pm 1/x$ sono luoghi di punti di flesso.