PROVA SCRITTA DI ANALISI I – 13/9/1999

C. D. Informatica - Università degli Studi dell'Insubria - Sede Varese

Prof. Kevin R. Payne

Esercizio 1. Sia $y = f(x)$ la funzione definita da

$$f(x) = xe^x.$$

Disegnare il grafico qualitativo nel piano (x, y); includendo il dominio di esistenza di f, eventuali estremi locali, punti di flesso e asintoti di f.

Esercizio 2.

a. Dare una condizione sufficiente affinchè $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ sia integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[a, b]$.

b. Calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx \quad \text{e} \quad \int_0^{\ln 2} xe^{-x} \, dx.$$

Esercizio 3.

a. Sia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucessione tale che la successione di somma parziali ridotte abbia la forma

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} = 3 + N^{-\ln N}$$

Calcolare, se esiste, la somma $A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

b. Studiare la convergenza delle seguenti serie (giustificando le risposte con gli enunciati dei criteri di convergenza usati) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3 + 4} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{3^n}.$$

Esercizio 4.

a. Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo integrale.

b. Siano $F(x)$ due volte derivabile nell'intervallo (a, b) e $x_0 \in (a, b)$ scrivere la formula di Taylor di ordine 2 per F centrata nel punto x_0 con il resto di Peano.

c. Data la funzione F definita da

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} \, dt,$$

Scrivere la formula di Taylor di ordine 2 per F centrata nel punto $x_0 = 0$ con il resto di Peano.

N.B. Sono concesse **3 ORE e 30 MINUTI** per la risoluzione dei quattro esercizi e **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Passati **5 minuti** dall'inizio della prova **NON** è consentito ritirarsi.